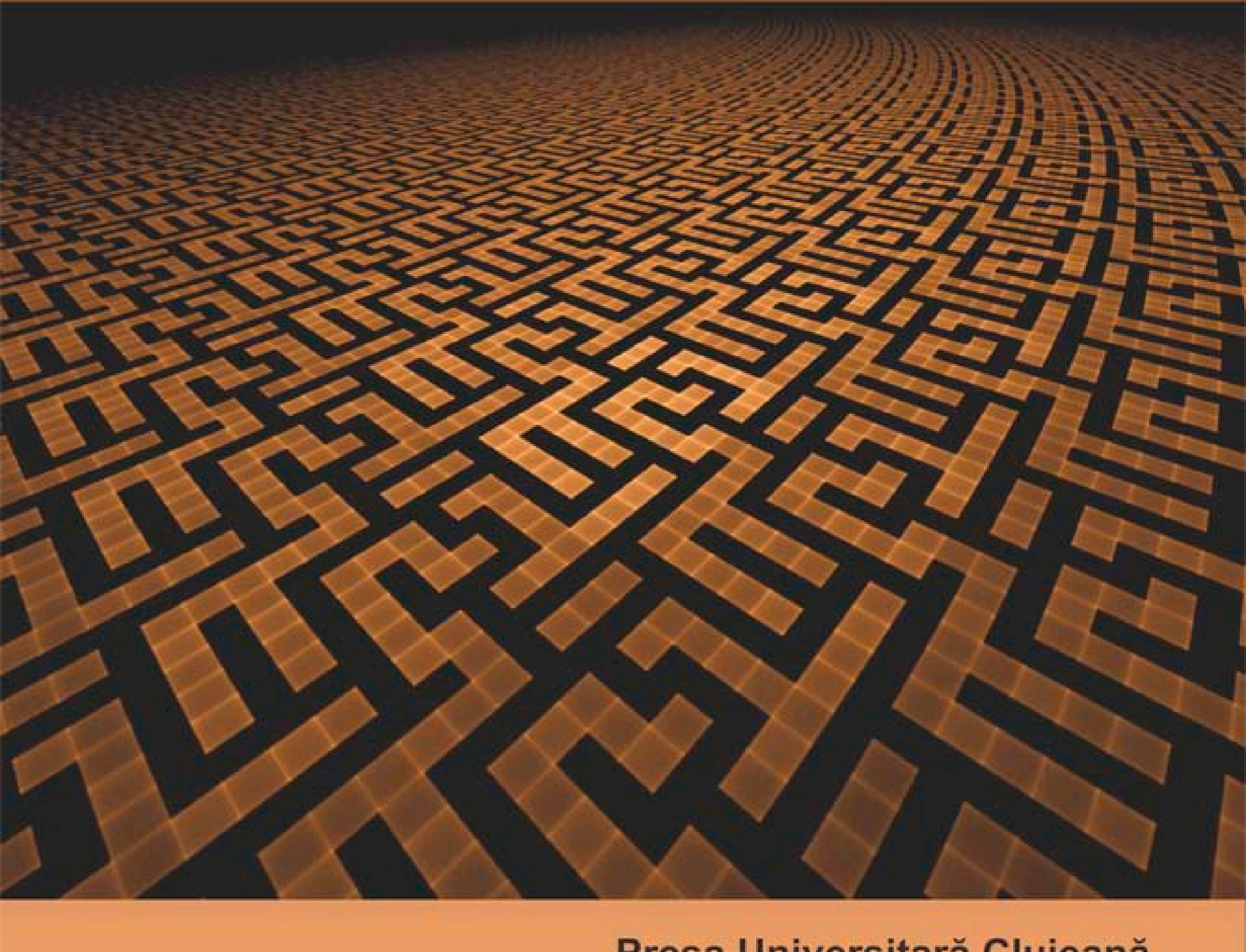
Ioana-Claudia Lazăr

ALGEBRĂ LINIARĂ



Presa Universitară Clujeană

IOANA-CLAUDIA LAZĂR

ALGEBRĂ LINIARĂ

Referenţi ştiinţifici:

Prof. univ. dr. Paşc Găvruţa

Prof. univ. dr. Csaba Varga

ISBN 978-973-595-674-5

Tehnoredactare computerizată: Autoarea

Universitatea Babeş-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruţa Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@editura.ubbcluj.ro
http://www.editura.ubbcluj.ro/

IOANA-CLAUDIA LAZĂR

ALGEBRĂ LINIARĂ

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ
2014

Cuprins

1 Introducere

Algera liniară este o disciplină importantă prezentă în toate programele de învăţământ ale universităţilor tehnice şi ale facultăţilor de matematică.

Cartea este structurată pe cinci capitole: Noţiuni introductive, Structura spaţiilor vectoriale, Aplicaţii liniare şi matrici, Valori şi vectori proprii, Spaţii vectoriale euclidiene. Fiecare capitol conţine aspecte teoretice prezentate detaliat necesare pentru rezolvarea de probleme. Fiecare capitol conţine, de asemenea, câte un subcapitol cu probleme de algebră liniară dintre care unele sunt rezolvate, altele sunt propuse pentru rezolvare. Culegerea respectă programa disciplinei Algebră Liniară şi Geometrie predată studenţilor din anul I a Facultăţii de Electronică şi Telecomunicaţii şi a Facultăţii de Construcţii din cadrul Universităţii 'Politehnica' din Timişoara.

Lucrarea de faţă se adresează, aşadar, studenţilor de la universităţile tehnice având la bază experienţa autoarei ca asistent în cadrul Universităţii 'Politehnica' din Timişoara în perioada 2011 − 2013. Sperăm ca aceasta carte să constituie un ajutor important pentru pregătirea cursurilor, a seminariilor şi a examenelor de algebră liniară.

Timişoara, 1 martie 2013 Autoarea

2 Noţiuni de bază

Definiţie 2.0.1. Un **corp** este format dintr-o mulţime F şi două operaţii $'+'$ şi $'\cdot'$ care atribuie fiecărei perechi (a, b) de elemente din F în mod unic un element $a + b$ respectiv $a \cdot b$ din F astfel încât următoarele condiţii să fie îndeplinite:

1. $(F, +)$ este un grup abelian, adică:
   (a) $\forall a, b \in F, a + b \in F$;
   (b) $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in F$;
   (c) $a + b = b + a, \forall a, b \in F$;
   (d) există un element neutru $0 \in F$, adică $0 + a = a, \forall a \in F$;
   (e) $\forall a \in F$, există $-a \in F$ astfel încât $(-a) + a = 0$, unde 0 este elementul neutru din F;
2. elementele din F au faţă de înmulţire $\cdot$ următoarele proprietăţi:
   (a) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in F$;
   (b) există un element neutru $1 \in F$, adică $1 \cdot a = a, \forall a \in F$;
   (c) $\forall a \in F$, există $a^{-1} \in F$ astfel încât $a^{-1} \cdot a = 1$, unde 1 este elementul unitate din F;
   (d) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a, \forall a, b, c \in F$;
   (e) $1 \neq 0$;

Dacă condiţiile 2.(b) şi 2.(c) nu sunt îndeplinite, atunci F se numeşte **inel**. Dacă este îndeplinită condiţia $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in F$, atunci F se numeşte **corp** respectiv **inel comutativ**.

Exemplu 2.0.2.
1. $(\mathbf{R}, +, \cdot), (\mathbf{Q}, +, \cdot), (\mathbf{C}, +, \cdot)$ corpuri comutative;
2. $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ inel comutativ cu unitate; nu este corp deoarece pentru $2 \in \mathbf{Z}$, de exemplu, nu există element inversabil în $\mathbf{Z}$;
3. Mulţimea numerelor pare întregi $2 \cdot \mathbf{Z}$ este un exemplu de inel fără element unitate.

Definiţie 2.0.3. Un **spaţiu vectorial** peste un corp F este format dintr-un grup aditiv, comutativ V a cărui elemente se numesc **vectori**, un corp de scalari F şi o operaţie de înmulţire care atribuie fiecărei perechi $(\overline{x}, a), \overline{x} \in V, a \in F$ în mod unic un vector $a\overline{x}$ astfel încât următoarele condiţii să fie îndeplinite:

1. $(a \cdot b)\overline{x} = a \cdot (b \cdot \overline{x}), \forall \overline{x} \in V, \forall a, b \in F$;

2. $a \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = a \cdot \overline{x} + a \cdot \overline{y}, \forall \overline{x}, \overline{y} \in V, \forall a \in F$;

3. $(a + b) \cdot \overline{x} = a \cdot \overline{x} + b \cdot \overline{x}, \forall \overline{x} \in V, \forall a, b \in F$;

4. $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}, \forall \overline{x} \in V, 1 \in F$.

Exemplu 2.0.4. 1. Vectorii de poziţie faţă de un punct fix formează un spaţiu vectorial real.

2. Mulţimea funcţiilor $\mathbf{R}^{[a,b]} = \{f \mid f[a, b] :\rightarrow \mathbf{R}\}$ formează un spaţiu vectorial faţă de operaţiile:

   (a) $(f + g)(t) = f(t) + g(t), \forall t \in [a, b], \forall f, g \in \mathbf{R}^{[a,b]}$;

   (b) $(c \cdot f)(t) = c \cdot (f(t)), \forall t \in [a, b], \forall c \in \mathbf{R}, \forall f \in \mathbf{R}^{[a,b]}$.

   Vectorul nul în acest spaţiu vectorial este $\overline{0}(t) = 0, \forall t \in [a, b]$.

3. F^n este un spaţiu vectorial peste F faţă de operaţiile liniare:

   (a) $a + b = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n), \forall a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in F^n$;

   (b) $c \cdot a = (c \cdot a_1, ..., c \cdot a_n), \forall a = (a_1, ..., a_n) \in F^n, \forall c \in F$.

   Vectorul nul în acest spaţiu vectorial este $(0, ..., 0)$. F^n se numeşte **spaţiul vectorial aritmetic peste F de dimensiune n**.

3 Structura spaţiilor vectoriale

3.1 Subspaţii vectoriale

În acest capitol vom studia submulţimi nevide U ale unui spaţiu vectorial V peste un corp comutativ F care sunt închise faţă de operatiile liniare şi care formează ele însele un spaţiu vectorial. Asemenea submulţimi sunt, conform următoarei definiţii, subspaţii vectoriale ale lui V.

Definiţie 3.1.1. O submulţime U a unui spaţiu vectorial V peste un corp F se numeşte **subspaţiu vectorial** dacă este diferită de mulţimea vidă şi îndeplineşte următoarele două condiţii:

1. $\overline{v_1} + \overline{v_2} \in U, \forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in U$;
2. $a \cdot \overline{v} \in U, \forall \overline{v} \in U, \forall a \in F$.

Notaţie: $U \leq V$.

A se observa că condiţiile 1. şi 2. pot fi sintetizate în următoarea condiţie: $(\overline{v_1} + \overline{v_2}) \cdot a \in U, \forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in U, \forall a \in F$.

Exemplu 3.1.2.

1. $\{(a, 0, 0) \mid a \in F\} \leq F^3$;
2. $\{(a, b, 0) \mid a, b \in F\} \leq F^3$;
3. $\{(a, 1, 0) \mid a, b \in F\}$ nu este subspaţiu vectorial în F^3;
4. Fiecare spaţiu vectorial este un subspaţiu vectorial în el însuşi;
5. $\{\overline{0}\} \leq V$, V spaţiu vectorial;
6. $\{f \mid f \in \mathbf{R}^{[a,b]}, f$ funcţie integrabilă $\} \leq \mathbf{R}^{[a,b]}$;
7. $\{f \mid f \in \mathbf{R}^{[a,b]}, f$ funcţie continuă $\} \leq \mathbf{R}^{[a,b]}$;
8. $\{f \mid f \in \mathbf{R}^{[a,b]}, f$ funcţie diferenţiabilă $\} \leq \mathbf{R}^{[a,b]}$;
9. o dreaptă din $\mathbf{R}^2$ ce trece prin origine este subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^2$;

10. o dreaptă din $\mathbf{R}^2$ ce nu trece prin origine nu este subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^2$;

11. un plan din $\mathbf{R}^3$ ce trece prin origine este subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^3$;

12. un plan din $\mathbf{R}^3$ ce nu trece prin origine nu este subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^3$;

13. $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ nu este spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$.

Propoziţie 3.1.3. Fiecare subspaţiu vectorial al unui spaţiu vectorial V peste un corp F este un spaţiu vectorial.

Definiţie 3.1.4. Fie V un spaţiu vectorial peste un corp F. Vectorul $\overline{v} \in V$ se numeşte **combinaţie liniară** a vectorilor $\overline{v_1}, ..., \overline{v_r} \in V$ dacă există scalari $a_1, ..., a_r \in F$ astfel încât $\overline{v} = a_1 \cdot \overline{v_1} + ... + a_r \cdot \overline{v_r}$.

Exemplu 3.1.5.

1. Vectorul $\overline{v_3}(5, 8, 0)$ este o combinaţie liniară a vectorilor $\overline{v_1}(2, -1, 0)$ şi $\overline{v_2}(1, 1, 0)$ deoarece $\overline{v_3} = -\overline{v_1} + 7\overline{v_2}$;

2. Vectorul $\overline{v_3}(1, 1, 1)$ nu poate fi scris o combinaţie liniară a vectorilor $\overline{v_1}(2, -1, 0)$ şi $\overline{v_2}(1, 1, 0)$;

3. Vectorul $\overline{v_3}(a, b, 0)$ este o combinaţie liniară a vectorilor $\overline{v_1}(2, -1, 0)$ şi $\overline{v_2}(1, 1, 0)$ deoarece $\overline{v_3} = \frac{a-b}{3} \cdot \overline{v_1} + \frac{a+2b}{3} \cdot \overline{v_2}$.

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul F.

Propoziţie 3.1.6. Fie $\overline{v_1}, ..., \overline{v_r} \in V$. Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare $L = \{\sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \overline{v_i} | a_i \in F\}$ ale vectorilor $\overline{v_i}, i = \overline{1, r}$ este un subspaţiu vectorial a lui V.

Demonstraţie. Deoarece $\overline{0} = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_r \in L$, rezultă că $L \neq \emptyset$.

Dacă $\overline{w_1}, \overline{w_2} \in L$, atunci există $a_1, ..., a_r, b_1, ..., b_r \in F$ astfel încât $\overline{w_1} = a_1 \cdot \overline{v_1} + ... + a_r \cdot \overline{v_r}$ şi $\overline{w_2} = b_1 \cdot \overline{v_1} + ... + b_r \cdot \overline{v_r}$. Astfel $\overline{w_1} + \overline{w_2} = (a_1 + b_1) \cdot \overline{v_1} + ... + (a_r + b_r) \cdot \overline{v_r} \in L$.

Pentru $\overline{w} \in L$, avem $\forall c \in F, c \cdot \overline{w} = (a_1 \cdot c) \cdot \overline{v_1} + ... + (a_r \cdot c) \cdot \overline{v_r} \in L$. □

Definiţie 3.1.7. Fie $\overline{v_1}, ..., \overline{v_r} \in V$. Subspaţiul vectorial

$$L = \{\sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \overline{v_i} | a_i \in F\}$$

se numeşte **subspaţiul generat** de către vectorii $\overline{v_i}, i = \overline{1, r}$.

Notaţie: $L =< \overline{v_i}, i = \overline{1, r} >$. Dacă $r = 0$, avem $L = \{\overline{0}\}$.

Propoziţie 3.1.8. Intersecţia unui număr oarecare de subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial V este un spaţiu vectorial.

Demonstraţie. Fie S un sistem nevid de subspaţii vectoriale ale lui V. Fie $D = \cap\{U | U \leq V, U \in S\}$.

Din $\overline{0} \in U, \forall U \in S$, rezultă că $\overline{0} \in D$. Astfel $D \neq \emptyset$.

Fie $\overline{a}, \overline{b} \in D$. Atunci $\overline{a}, \overline{b} \in U, \forall U \in S$. Dar $U \leq V$ şi deci $\overline{a} + \overline{b} \in U, \forall U \in S$. Atunci $\overline{a} + \overline{b} \in D$.

Fie $c \in F, \overline{a} \in D$. Cum $U \leq V$, $c \cdot \overline{a} \in U, \forall U \in S$. Atunci $c \cdot \overline{a} \in D$.

Deci $D \leq V$. □

Reuniunea unui număr oarecare de subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial V nu este un spaţiu vectorial. De exemplu reuniunea unei drepte din $\mathbf{R}^3$ ce trece prin origine şi a unui plan din $\mathbf{R}^3$ ce trece prin origine nu este un subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^3$.

Definiţie 3.1.9. Fie M o submulţime oarecare a unui spaţiu vectorial V. Sistemul S al tuturor subspaţiilor U din V pentru care $M \subset U$, este diferit de mulţimea vidă (deoarece $V \in S$). Se consideră intersecţia $< M >= \cap\{U | M \subset U, U \leq V\} \leq V$ (conform Propoziţiei 3.1.8). $< M >$ se numeşte **subspaţiul generat** de către mulţimea M şi este cel mai mic subspaţiu care îl conţine pe M.

Propoziţie 3.1.10. $< M >$ conţine toate combinaţiile liniare posibile a oricărui număr finit de vectori din M. De asemenea, $< \emptyset >= \{\overline{0}\}$.

Demonstraţie. Adunând două combinaţii liniare din M sau înmulţind o combinaţie liniară cu un scalar, se obţine din nou o combinaţie liniară. Mulţimea Y a tuturor combinaţiilor liniare din M este, conform definiţiei, un subspaţiu vectorial a lui V. Deoarece $\overline{a} = \overline{a} \cdot 1$, fiecare vector $\overline{a} \in M$ este o combinaţie liniară din M. Astfel $M \subseteq Y$ şi deci, conform definiţiei anterioare, $< M > \leq Y$. Pe de altă parte, deoarece $< M >$ este un subspaţiu vectorial, el trebuie să conţină, pentru fiecare număr finit de vectori, şi combinaţiile lor liniare. Astfel $Y \leq < M >$. Aşadar $Y = < M >$. De altfel $\{\overline{0}\}$ este cel mai mic subspaţiu a lui V şi este îndeplinită condiţia $\emptyset \subset \{\overline{0}\}$. □

Definiţie 3.1.11. Fie $U, W \leq V$. **Suma** subspaţiilor U şi W se calculează prin $U + W = \{\overline{u} + \overline{w} \mid \overline{u} \in U, \overline{w} \in W\}$.

Propoziţie 3.1.12. Suma a două subspaţii vectoriale U_1 şi U_2 este un subspaţiu vectorial.

Demonstraţie. Deoarece U_1 şi U_2 sunt închise faţă de operaţiile liniare, $U_1 + U_2$ este, de asemenea, închisă faţă de aceste operaţii. □

3.2 Bază şi dimensiune

În acest capitol vom arăta că fiecare subspaţiu vectorial U finit generat al unui spaţiu vectorial V peste F are o bază, iar oricare două baze din U au acelaşi număr de elemente.

Fie $\overline{v_1}, ..., \overline{v_r}$ un număr finit de vectori din F-spaţiul vectorial V. Fie $U =< \overline{v_i}, i = \overline{1, r} >$ subspaţiul din V generat de către aceşti vectori. Atunci fiecare vector $\overline{u} \in U$ poate fi scris ca o combinaţie liniară

$$\overline{u} = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \overline{v_i}, a_i \in F.$$

În particular

$$\overline{0} = 0 \cdot \overline{v_1} + ... + 0 \cdot \overline{v_r} \text{ (reprezentarea trivială a vectorului nul).}$$

Dacă vectorii $\overline{v_1, ..., v_r}$ sunt aleşi adecvat, vectorul nul admite şi reprezentarea

$$\overline{0} = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \overline{v_i}$$

astfel încât cel puţin un $a_i \neq 0, i = \overline{1, r}$.

Definiţie 3.2.1. Vectorii $\overline{v_1}, ..., \overline{v_r} \in V$ se numesc **liniar independenţi** peste F dacă din

$$\overline{0} = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \overline{v_i}$$

rezultă $a_1 = ... = a_r = 0$. În caz contrar, ei se numesc **liniar dependenţi**.

O submulţime $M \subset V$ se numeşte **liniar independentă** dacă coincide cu mulţimea vidă sau conţine un număr finit de vectori liniar independenţi care sunt doi câte doi diferiţi. În caz contrar, submulţimea M se numeşte **liniar dependentă**.

Exemplu 3.2.2. 1. Vectorii unitate $\overline{e_i} \in F^n, i = \overline{1,n}, \overline{e_i} = (a_1, ..., a_n)$,

$a_j = \begin{cases} 1 & dacă\, j = i \\ 0 & dacă\, j \neq i, \end{cases}$ $j = \overline{1,n}$ sunt liniar independenţi.

2. Vectorii $\overline{v_1}(2,1,0), \overline{v_2}(1,0,1)$ şi $\overline{v_3}(3,1,1)$ sunt liniar dependenţi deoarece $\overline{v_1} + \overline{v_2} - \overline{v_3} = \overline{0}$.

3. Vectorul $\overline{v} \in V$ este liniar dependent dacă şi numai dacă $\overline{v} = \overline{0}$.

4. Dacă o submulţime $M = \{\overline{v_1}, ..., \overline{v_r}\}$ conţine vectorul nul, atunci ea este liniar dependentă.

Definiţie 3.2.3. O submulţime M a spaţiului vectorial V se numeşte **sistem de generatori** a lui V dacă $V = < M >$. V se numeşte **finit generat** dacă are un sistem finit de generatori.

Spaţiul nul este generat de către vectorul nul şi de către mulţimea vidă.

Definiţie 3.2.4. Mulţimea $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_r\}$ de vectori din V este o **bază** pentru V dacă:

1. V este generat de către vectorii $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_r\}$;

2. vectorii $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_r\}$ sunt liniar independenţi.

Exemplu 3.2.5. 1. Vectorii unitate $\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n$ formează o bază în F^n. Acestă bază se numeşte **baza canonică**. Ea nu este singura bază din F^n. Vectorii $\overline{v}_1(1,1)$ şi $\overline{v}_2(1,0)$, de exemplu, formează, de asemenea, o bază pentru $\mathbf{R}^2$.

2. Vectorii $\overline{v}_1(1,1), \overline{v}_2(1,2)$ şi $\overline{v}_3(2,3)$ sunt un sistem de generatori din $\mathbf{R}^2$, dar nu formează o bază pentru $\mathbf{R}^2$ deoarece nu sunt liniar independenţi.

Fie U un subspaţiu vectorial finit generat al spaţiului vectorial V peste F.

Propoziţie 3.2.6. Fiecare sistem de generatori din U conţine o bază din U.

Demonstraţie. Demonstraţia este prin inducţie după r. Dacă $U = \{\overline{0}\}$ este spaţiul nul, atunci mulţimea vidă $\emptyset$ este o bază pentru U. În acest

caz afirmaţia este trivială. Din acest motiv putem presupune, fără a restricţiona generalitatea, că $\overline{v}_i \neq \overline{0}$, $i = \overline{1, r}$.

Dacă $r = 1$, U este generat, conform ipotezei, de $\overline{v}_1$. Deoarece $\overline{v}_1 \neq \overline{0}$, $\overline{v}_1$ este liniar independent şi deci $\{\overline{v}_1\}$ este o bază pentru U.

Presupunem că afirmaţia propoziţiei este adevărată pentru toate sistemele de generatori ale lui U ce conţin mai puţin de r elemente.

Dacă $\overline{v}_1, ..., \overline{v}_r$ sunt liniar independenţi, atunci $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_r\}$ formează o bază. În caz contrar, există o combinaţie liniară $\overline{0} = \overline{v}_1 \cdot \overline{a}_1 + ... + \overline{v}_r \cdot \overline{a}_r$ astfel încât nu toţi scalarii a_i sunt egali cu zero. Numerotând corespunzător, putem presupune că $a_r \neq 0$. Atunci $\overline{v}_r = (\overline{v}_1 \cdot \overline{a}_1 + ... + \overline{v}_r \cdot \overline{a}_r) \cdot (-a_r^{-1})$ este o combinaţie liniară a vectorilor $\overline{v}_1, ..., \overline{v}_{r-1}$. Aşadar $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_{r-1}\}$ este un sistem de generatori pentru U. Această mulţime de $r - 1$ vectori conţine deci, conform ipotezei inducţiei, o bază. □

Propoziţie 3.2.7. Fie $\{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r\}$ o bază din U. Atunci fiecare $r + 1$ vectori din U sunt liniar dependenţi.

Propoziţie 3.2.8. Fie $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r$ vectori liniar independenţi din $U \leq V$ şi fie $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_s\}$ un sistem de generatori din U. Atunci $r \leq s$.

Demonstraţie. Conform Propoziţiei 3.2.6, $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_s\}$ conţine o bază din U cu $t \leq s$ vectori. Renumerotând vectorii, rezultă că vectorii $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_t\}$ formează o bază pentru U. Conform Propoziţiei 3.2.7, mulţimea de vectori liniar independenţi $\{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r\}$ conţine cel mult t vectori. Aşadar $r \leq t$ şi deci $r \leq s$. □

Lemă 3.2.9. Fie $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r$ vectori liniar independenţi din V. Un vector $\overline{v} \in V$ este o combinaţie liniară a vectorilor $\overline{u}_i$ dacă şi numai dacă vectorii $\overline{v}, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_r$ sunt liniar dependenţi.

Propoziţie 3.2.10. Fie U un subspaţiu vectorial al unui spaţiu vectorial V. Atunci:

1. U este de asemenea finit generat şi conţine o bază;

2. oricare două baze din U au acelaşi număr de elemente.

În particular, V are o bază finită şi oricare două baze din V au acelaşi număr de elemente.

Demonstraţie. 1. Dacă $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r$ sunt vectori liniar independenţi din U, atunci ei sunt şi vectori liniar independenţi din V. Deoarece V are un sistem de generatori cu n elemente, conform Propoziţiei 3.2.8, rezultă că $r \leq n$. Fie $B = \{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r\}$ o submulţime maximă liniar independentă de vectori $\overline{u}_i$ din U, $i = \overline{1, r}$. Atunci şi B este un sistem de generatori pentru U, deoarece pentru fiecare $\overline{v} \in U$, vectorii $\overline{v}, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_r$ sunt liniar dependenţi din pricina maximalităţii lui B. Aşadar, conform Lemei 3.2.9, $\overline{v}$ este o combinaţie liniară a vectorilor $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r$. Aşadar B este o bază pentru U.

2. Fie $B = \{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r\}$ şi $B' = \{\overline{u}'_1, ..., \overline{u}'_s\}$ două baze din U. Deoarece B' este un sistem de generatori şi vectorii $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r$ sunt liniar independenţi, conform Propoziţiei 3.2.8, rezultă că $r \leq s$. Analog, deoarece B este sistem de generatori şi vectorii $\overline{u}'_1, ..., \overline{u}'_s$ sunt liniar independenţi, $s \leq r$. Aşadar $r = s$.

□

Definiţie 3.2.11. Fie V un spaţiu vectorial finit generat peste F. Numărul comun de elemente a tuturor bazelor din V se numeşte **dimensiunea** lui V şi o notăm cu $\dim V$.

Exemplu 3.2.12. 1. $\dim F^n = n$ deoarece baza canonică $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ este o bază pentru F^n.

2. Fie $U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in F\} \leq F^3$. Deoarece $\overline{v}_1(1, 0, 0), \overline{v}_2(0, 1, 0)$ formează o bază pentru U, $\dim U = 2$.

3. $\dim\{\emptyset\} = 0$.

Corolar 3.2.13. Fie U un subspaţiu vectorial finit generat al spaţiului vectorial V cu $\dim U = d$. Atunci avem:

1. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

   (a) $\{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_d\}$ formează o bază în U;

   (b) $\{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_d\}$ sunt liniar independenţi;

   (c) $\{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_d\}$ este un sistem de generatori din U;

   (d) fiecare $\overline{u} \in U$ are o reprezentare unică $\overline{u} = \sum_{i=1}^{d} a_i \cdot \overline{u_i}$;

   (e) $\overline{0} \in U$ are numai reprezentare trivială.

2. $\dim U \leq \dim V$;

3. Dacă $\dim U = \dim V$, atunci $U = V$.

Propoziţie 3.2.14. (Steinitz) Fie $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r$ vectori liniar independenţi din V şi fie $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_s\}$ o bază din V. Atunci avem:

1. $r \leq s$;

2. Numerotând corespunzător vectorii $\overline{v}_1, ..., \overline{v}_s$, rezultă că vectorii $\{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r, \overline{v}_{r+1}, ..., \overline{v}_s\}$ formează, la rândul lor, o bază pentru V.

Obţinem aşadar o bază pentru V înlocuind anumiţi r vectori dintre vectorii $\overline{v}_1, ..., \overline{v}_s$ cu vectorii $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r$. Invers, orice submulţime de vectori liniar independenţi din V, $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r$ poate fi extinsă la o bază pentru V.

Demonstraţie. 1. Conform Propoziţiei 3.2.8.

2. Dacă $r = s$, conform Corolarului 3.2.13, vectorii $\{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r\}$ formează o bază pentru U.

   Dacă $r < s$, deoarece $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_s\}$ este o bază pentru V, cel puţin unul dintre vectorii $\overline{v} \in \{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_s\}$ nu este o combinaţie liniară a vectorilor $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r$. Renumerotând putem presupune că $\overline{v} = \overline{v}_{r+1}$. Aşadar, conform Lemei 3.2.9, vectorii $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r, \overline{v}_{r+1}$ sunt liniar independenţi. Repetând acelaşi argument de $r - s$ ori, propoziţia rezultă. Conform Corolarului 3.2.13, oricare două baze pentru U au acelaşi număr de elemente. Aşadar, cele două afirmaţii rezultă din 2.

□

Propoziţie 3.2.15. Fie U şi W două subspaţii vectoriale finit generate ale spaţiului vectorial V. Atunci

$$\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W).$$

Demonstraţie. Conform Propoziţiilor 3.1.8 şi 3.1.12, $U \cap W$ şi $U + W$ sunt subspaţii vectoriale din V. Fie $B_d = \{d_1, ..., d_r\}$ o bază pentru $U \cap W$. (Observaţi că şi cazul $r = 0$ este admis; dacă $U \cap W$ este spaţiul nul, atunci baza sa este mulţimea vidă). Conform Propoziţiei 3.2.14, baza B_d poate fi extinsă atât la o bază $B_1 = \{d_1, ..., d_r, a_1, ..., a_s\}$ pentru U cât şi

la o bază $B_2 = \{d_1, ..., d_r, b_1, ..., b_t\}$ pentru W. Vom arăta în continuare că $B = \{d_1, ..., d_r, a_1, ..., a_s, b_1, ..., b_t\}$ este o bază pentru $U + W$.

Conform definiţiei sumei a două subspaţii vectoriale, fiecare vector $\overline{x} \in U + W$ poate fi scris sub forma $\overline{x} = \overline{u} + \overline{w}$ unde $\overline{u} \in U$ şi $\overline{w} \in W$. Deoarece $\overline{u}$ poate fi scris ca o combinaţie liniară a vectorilor din B_1, iar $\overline{w}$ ca o combinaţie liniară a vectorilor din B_2, $\overline{x}$ poate fi scris ca o combinaţie liniară a vectorilor din B. Aşadar $< B >= U + W$.

Pentru a demonstra liniar independenţa lui B, vom presupune

$$d_1x_1 + ... + d_rx_r + a_1y_1 + ... + a_sy_s + b_1z_1 + ... + b_tz_t = 0,$$

unde $x_i, y_j, z_k \in F, i = \overline{1, r}, j = \overline{1, s}, k = \overline{1, t}$. Aşadar

$$d_1x_1 + ... + d_rx_r + a_1y_1 + ... + a_sy_s = -b_1z_1 - ... - b_tz_t.$$

Deoarece membrul stâng al egalităţii de mai sus conţine un vector din U, iar cel drept conţine un vector din W, ambele părţi trebuie să reprezinte un vector din $U \cap W$. Acest vector poate fi scris ca o combinaţie liniară a vectorilor $d_1, ..., d_r$. Conform Corolarului 3.2.13, datorită faptului că vectorii din B_1 şi B_2 sunt liniar independenţi, rezultă

$$x_1 = ... = x_r = y_1 = ... = y_s = z_1 = ... = z_t = 0.$$

Astfel obţinem

$$\dim U + \dim W = (r+s)+(r+t) = r+(r+s+t) = \dim(U \cap W) + \dim(U+W).$$

□

Fie V un spaţiu vectorial finit generat peste F. Fie $B = \{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n\}$ o bază pentru V. Atunci fiecare vector $\overline{v} \in V$ are o reprezentare unică

$$\overline{v} = a_1\overline{v_1} + ... + a_n\overline{v_n}, a_i \in F, i = \overline{1, n}.$$

Coeficienţii $a_i, i = \overline{1, n}$ se numesc **coordonatele** vectorului $\overline{v}$ faţă de baza B, iar vectorul $\overline{a}(a_1, ..., a_n) \in F^n$ se numeşte **vectorul de coordonate** a lui $\overline{v}$ faţă de baza B.

Propoziţie 3.2.16. Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n şi fie $B = \{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n\}$ o bază pentru V. Fie $\varphi : V \to F^n$ aplicaţia care atribuie fiecărui vector $\overline{v} \in V$ vectorul său de coordonate $\overline{a}(a_1, ..., a_n) \in F^n$. Atunci:

1. φ este bijectivă;

2. $\varphi(\overline{v} + \overline{w}) = \varphi(\overline{v}) + \varphi(\overline{w}), \forall \overline{v}, \overline{w} \in V$;

3. $\varphi(c \cdot \overline{v}) = c \cdot \varphi(\overline{v}), \forall \overline{v} \in V, \forall c \in F$.

3.3 Sume directe

Vom arăta că fiecare $F-$spaţiu vectorial V are o bază. De aici va rezulta faptul că V admite o descompunere directă în subspaţii vectoriale de dimensiune 1.

Fie V un F-spaţiu vectorial de dimensiune finită, fie $\mathcal{A}$ o mulţime de indici şi fie $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ un sistem de subspaţii vectoriale din V. **Suma** subspaţiilor $U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ este

$$\textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \{\overline{v} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \overline{u}_\alpha \in V \mid \overline{u}_\alpha \in U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Propoziţie 3.3.1. Suma $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ subspaţiilor $U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ este un subspaţiu vectorial din V. Mai exact:

$$\textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \cap\{U \leq V \mid U_\alpha \leq U, \forall \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Definiţie 3.3.2. Fie V un F-spaţiu vectorial de dimensiune finită, fie $\mathcal{A}$ o mulţime de indici şi fie $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ un sistem de subspaţii vectoriale din V. Suma $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ se numeşte **directă** dacă $\forall \alpha \in \mathcal{A}, U_\alpha \neq \{\overline{0}\}$,

$$U_\alpha \cap \textstyle\sum_{\beta \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha\}} U_\beta = \{\overline{0}\}.$$

Propoziţie 3.3.3. Fie V un F-spaţiu vectorial de dimensiune finită, fie $\mathcal{A}$ o mulţime de indici şi fie $\{\overline{0}\} \neq \{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ un sistem de subspaţii vectoriale din V. Suma $S = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ este directă dacă şi numai dacă $\forall \overline{0} \neq \overline{s} \in S$ poate fi reprezentat în mod unic sub forma $\overline{s} = \overline{u}_{\alpha_1} + ... + \overline{u}_{\alpha_n}$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{A}$ indici doi câte doi diferiţi, $\overline{0} \neq \overline{u}_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}, i = \overline{1, n}$.

Propoziţie 3.3.4. Fie V un F-spaţiu vectorial de dimensiune finită şi fie $\overline{0} \neq \overline{u}_i \in V, i = \{1, r\}$. Vectorii $\overline{u}_i, i = \{1, r\}$ sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă suma $S = \sum_{i=1}^{r} F \cdot \overline{u}_i$ este directă unde $F \cdot \overline{u}_i, i = \{1, r\}$ sunt subspaţii vectoriale 1-dimensionale din V.

Propoziţie 3.3.5. 1. Fiecare F-spaţiu vectorial V de dimensiune finită are o bază.

2. Dacă $V \neq \{\overline{0}\}$ este un F-spaţiu vectorial de dimensiune finită şi B este o bază pentru V, atunci $V = \oplus_{\overline{b} \in B} F \cdot \overline{b}$.

Fie V un F-spaţiu vectorial de dimensiune n şi fie $U \leq V, U \neq \{\overline{0}\}, U \neq V$. Atunci există un subspaţiu vectorial $K \leq V$ astfel încât $V = U \oplus K$. Dacă $B = \{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r\}$ este o bază pentru U, conform lui Steinitz (vezi Propoziţia 3.2.14), B poate fi completată cu $n - r$ vectori $\overline{v}_{r+1}, ..., \overline{v}_n$ la o bază pentru V. Conform Propoziţiei 3.1.6, $K = \{\sum_{j=1}^{n-r} a_j \cdot \overline{v}_{r+j} \mid a_j \in F\} \leq V$. Aşadar, am găsit o bază pentru V formată din vectorii $\{\overline{u}_i \mid 1 \leq i \leq r\} \bigcup \{\overline{v}_{r+j} \mid 1 \leq j \leq n - r\}$. Observăm că $U \cap K = \{\overline{0}\}$ şi $V = U + K$. Subspaţiul vectorial K se numeşte **complementul** lui U în V.

Fie V un F-spaţiu vectorial şi fie $\{\overline{0}\} \neq U \leq V$. Complementul lui U nu este unic determinat. De exemplu, dacă $V = F^2$ şi $U = \{(a, 0) \mid a \in F^*\} \leq V$, atunci atât $K_1 = \{(0, b) \mid b \in F^*\} \leq V$ cât şi $K_2 = \{(c, c) \mid c \in F^*\} \leq V$ sunt complemente ale lui U în V.

Propoziţie 3.3.6. Orice subspaţiu vectorial al unui spaţiu vectorial are un complement.

3.4 Exerciţii

Exerciţiu 3.4.1. Stabiliţi dacă următoarele mulţimi sunt subspaţii vectoriale.

1. $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$;
2. $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$;
3. $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^2\}$;
4. $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = x_1 + x_2\}$;
5. $S = \{B \in \mathcal{M}_{2x2}(\mathbf{R}) \mid A \cdot B = B \cdot A\}$, unde $A \in \mathcal{M}_{2X2}(\mathbf{R})$;
6. $S = \{B \in \mathcal{M}_{2x2}(\mathbf{R}) \mid A \cdot B \neq B \cdot A\}$, unde $A \in \mathcal{M}_{2X2}(\mathbf{R})$;
7. $S = \{B \in \mathcal{M}_{2x2}(\mathbf{R}) \mid B \cdot A = 0\}$, unde $A \in \mathcal{M}_{2X2}(\mathbf{R})$;

8. $U_1 = \{\overline{v} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2 \cdot x + y + 4 \cdot z = 0\}$;

9. $U_2 = \{\overline{v} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0, 3 \cdot x + 2 \cdot y = 0\}$;

10. $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$;

11. $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ w & 0 \end{pmatrix}, z, w \in \mathbb{R} \right\}$;

12. $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = x_1$ sau $x_3 = x_2\}$.

Soluţie. 1. Deoarece $(0, 0) \in S, S \neq \emptyset$. Trebuie să verificăm dacă pentru oricare $\overline{x} = (x_1, x_2), \overline{y} = (y_1, y_2)$, $\overline{x} + \overline{y} \in S$. Observăm că acest lucru e adevărat deoarece $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 0$. De asemenea, trebuie să verificăm dacă pentru oricare $\overline{x} \in S$ şi oricare $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha\overline{x} \in S$. Într-adevăr, deoarece $\alpha(x_1 + x_2) = 0$, această condiţie este îndeplinită. În concluzie, $S \leq \mathbf{R}^2$.

2. Observăm că pentru oricare $\overline{x} = (x_1, x_2), \overline{y} = (y_1, y_2) \in S, \overline{x} + \overline{y} \notin S$. Acest lucru rezultă deoarece, deşi $x_1 \cdot x_2 = 0$ şi $y_1 \cdot y_2 = 0$, $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \neq 0$. Deci S nu este subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^2$.

3. Observăm că pentru oricare $\overline{x}, \overline{y} \in S, \overline{x} + \overline{y} \notin S$. Aşadar S nu este subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^2$.

4. Deoarece $(0, 0, 0) \in S, S \neq \emptyset$. Pentru oricare $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3), \overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in S$ rezultă că $\overline{x} + \overline{y} \in S$. Mai departe, observăm că pentru oricare $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S$ şi pentru oricare $\alpha \in \mathbf{R}$, avem $\alpha\overline{x} \in S$. În concluzie rezultă că $S \leq \mathbf{R}^3$.

5. Observăm că, deoarece $I_2 \in S$, $S \neq \emptyset$. Pentru oricare $B, C \in S$, observăm că $B + C \in S$. Acest lucru rezultă deoarece dacă $A \cdot B = B \cdot A$ şi $A \cdot C = C \cdot A$, atunci $A \cdot B + A \cdot C = B \cdot A + C \cdot A$ si deci $A \cdot (B + C) = (B + C) \cdot A$. Mai departe, observăm că pentru oricare $B \in S$ şi oricare $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha B \in S$. Acest lucru rezultă deoarece dacă $A \cdot B = B \cdot A$ atunci $A \cdot (\alpha B) = (\alpha B) \cdot A$. În concluzie rezultă că $S \leq \mathcal{M}_{2x2}(\mathbf{R})$.

Exerciţiu 3.4.2. Fie S mulţimea perechilor ordonate de numere reale. Definim înmulţirea scalară şi adunarea pe S prin $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$, $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$. Să se arate că S cu înmulţirea cu scalari şi cu operaţia de adunare $\oplus$ nu este un spaţiu vectorial.

Exerciţiu 3.4.3. Stabiliţi care din următoarele mulţimi reprezintă sisteme de generatori:

1. $S = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ pentru $\mathbf{R}^3$;
2. $S = \{(1,2,4),(2,3,1),(4,-1,1)\}$ pentru $\mathbf{R}^3$;
3. $S = \{(-1,2),(1,-2),(2,-4)\}$ pentru $\mathbf{R}^2$;
4. $S = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ pentru $\mathbf{R}^3$;
5. $S = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,2,3)\}$ pentru $\mathbf{R}^3$;
6. $S = \{(1,1,3),(0,2,1)\}$ pentru $\mathbf{R}^3$.

Soluţie. 1. Trebuie să verificăm dacă există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ astfel încât să un vector oarecare (a,b,c) din $\mathbf{R}^3$ să poată fi scris ca o combinaţie liniară a vectorilor din S. Din

$$(a,b,c) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,0,0)$$

obţinem sistemul
$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_1 + \alpha_2 = b \\ \alpha_1 = c \end{cases}$. Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, matricea sistemului este nesingulară şi deci sistemul are o soluţie unică $\alpha_1 = c, \alpha_2 = b - c, \alpha_3 = a - b$. În concluzie, S formează un sistem de generatori pentru $\mathbf{R}^3$.

2. Notăm cu (a,b,c) un vector oarecare din $\mathbf{R}^3$. Căutăm numere reale $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ astfel încât

$$(a,b,c) = \alpha_1(1,2,4) + \alpha_2(2,3,1) + \alpha_3(4,-1,1).$$

Obţinem sistemul $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = b \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = c \end{cases}$ a cărui matrice este singulară. Verificăm dacă sistemul este compatibil. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 4 & 3 & c \end{vmatrix} = 2a + 5b - 3c,$$

sistemul este incompatibil şi deci vectorii din S nu formează un sistem de generatori pentru R^3.

3. Căutăm numerele reale $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ astfel încât

$$(a, b, c) = \alpha_1(-1, 2) + \alpha_2(1, -2) + \alpha_3(2, -4).$$

Obţinem sistemul $\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = b \end{cases}$. Verificăm dacă sistemul este compatibil. Observăm că $\begin{vmatrix} -1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix} = -2a - b \neq 0$. Deci, sistemul fiind incompatibil, S nu formează un sistem de generatori pentru $\mathbf{R}^2$.

Exerciţiu 3.4.4. Fiind daţi vectorii $\overline{x}_1 = (-1, 2, 3), \overline{x}_2 = (3, 4, 2), \overline{x} = (2, 6, 6), \overline{y} = (-9, -2, 5)$, verificaţi dacă:

1. $\overline{x} \in \mathrm{Span}\{\overline{\mathrm{x}}_1, \overline{\mathrm{x}}_2\}$;

2. $\overline{y} \in \mathrm{Span}\{\overline{\mathrm{x}}_1, \overline{\mathrm{x}}_2\}$.

Soluţie. 1. Trebuie verificat dacă există numere reale α_1, α_2 astfel încât

$$\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2.$$

Rezultă sistemul $\begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 6. \end{cases}$. Pentru a verifica dacă sistemul este compatibil, calculăm $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Aşadar, deoarece sistemul este incompatibil, $\overline{x} \notin \mathrm{Span}\{\overline{\mathrm{x}}_1, \overline{\mathrm{x}}_2\}$.

2. Verificăm dacă există numere reale α_1, α_2 astfel încât

$$\overline{x} = \alpha_1\overline{y}_1 + \alpha_2\overline{y}_2.$$

Rezultă sistemul $\begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 = -9 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = -2 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 5. \end{cases}$. Calculăm $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$. Aşadar, deoarece sistemul este compatibil, $\overline{y} \in \mathrm{Span}\{\overline{\mathrm{x}}_1, \overline{\mathrm{x}}_2\}$. Rezolvând sistemul, obţinem $\alpha_1 = 3$ şi $\alpha_2 = -2$ şi deci $\overline{y} = 3\overline{x}_1 - 2\overline{x}_2$.

Exerciţiu 3.4.5. Verificaţi care din următoarele mulţimi este un sistem de generatori pentru P_3 (mulţimea polinoamelor de grad cel mult 2):

1. $S = \{1, x^2, x^2 - 3\}$;
2. $S = \{2, x^2, x, 2x + 3\}$;
3. $S = \{x + 2, x + 1, x^2 - 1\}$;
4. $S = \{x + 2, x^2 - 1\}$.

Soluţie. 1. Verificăm dacă un polinom oarecare $ax^2 + bx + c$ din P_3 poate fi scris ca o combinaţie liniară a polinoamelor din S. Adică verificăm dacă există constante $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ astfel încât

$$ax^2 + bx + c = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot (x^2 - 2).$$

Obţinem sistemul $\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ 0 = b \\ \alpha_1 - 2\alpha_3 = c. \end{cases}$. Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & c \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -2b \neq 0$, sistemul este incompatibil şi deci S nu este un sistem de generatori pentru P_3.

2. Verificăm dacă pentru oricare polinom $ax^2 + bx + c$ din P_3, există scalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ astfel încât

$$ax^2 + bx + c = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x + \alpha_4 \cdot (2x + 3).$$

Obţinem sistemul $\begin{cases} \alpha_2 = a \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 = b \\ 2 \cdot \alpha_1 + 3\alpha_4 = c. \end{cases}$. Deoarece rangul matricii sistemului este 3, sistemul este compatibil nedeterminat. Rezolvând sistemul, obţinem $\alpha_1 = \frac{1}{4} \cdot (2c - 3b + 3\beta), \alpha_2 = a, \alpha_3 = \beta, \alpha_4 = \frac{b-\beta}{2}, \beta \in \mathbf{R}$. Aşadar S este un sistem de generatori pentru P_3.

Exerciţiu 3.4.6. Stabiliţi dacă următorii vectori sunt liniar independenţi. Dacă sunt liniar dependenţi, stabiliţi relaţia de liniar dependenţă.

1. $\overline{x}_1 = (1, 1, 1), \overline{x}_2 = (1, 1, 0), \overline{x}_3 = (1, 0, 0)$;

2. $\overline{x}_1 = (1, 2, 4), \overline{x}_2 = (2, 3, 1), \overline{x}_3 = (4, -1, 1)$;

3. $p_1(x) = x^2 - 2x + 3, p_2(x) = 2x^2 + x + 8, p_3(x) = x^2 + 8x + 7$;

4. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

5. $2, x^2, x, 2x + 3$;

6. $x + 2, x + 1, x^2 - 1$.

Soluţie. 1. Verificăm dacă singura combinaţie liniară a vectorilor $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ care dă vectorul nul, este cea trivială. Din $c_1 \cdot \overline{x}_1 + c_2 \cdot \overline{x}_2 + c_3 \cdot \overline{x}_3 = \overline{0}$ rezultă sistemul $\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$ a cărui matrice este nesingulară ceea ce implică faptul că cei trei vectori sunt liniar independenţi.

2. Verificăm dacă singura combinaţie liniară a vectorilor $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ care dă vectorul nul, este cea trivială. Din $c_1 \cdot \overline{x}_1 + c_2 \cdot \overline{x}_2 + c_3 \cdot \overline{x}_3 = \overline{0}$ rezultă sistemul $\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ 4c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$ a cărui matrice este singulară ceea ce implică faptul că cei trei vectori sunt liniar dependenţi. Aşadar sistemul este compatibil nedeterminat. Rezolvându-l, obţinem $c_1 = 2\alpha, c_2 = -3\alpha, c_3 = \alpha, \alpha \in \mathbf{R}$. Deci relaţia de liniar dependenţă a vectorilor este $2\overline{x}_1 - 3\overline{x}_2 + \overline{x}_3 = 0$.

3. Verificăm dacă singura combinaţie liniară a vectorilor $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ care dă vectorul nul, este cea trivială. Din

$$c_1 \cdot p_1(x) + c_2 \cdot p_1(x) + c_3 \cdot p_1(x) = 0$$

rezultă sistemul $\begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ -2c_1 + c_2 + 8c_3 = 0 \\ 3c_1 + 8c_2 + 7c_3 = 0 \end{cases}$ a cărui matrice este singulară ceea ce implică faptul că cei trei vectori sunt liniar dependenţi. Aşadar sistemul este compatibil nedeterminat. Rezolvându-l, obţinem $c_1 = 3\alpha, c_2 = -2\alpha, c_3 = \alpha, \alpha \in \mathbf{R}$. Deci relaţia de liniar dependenţă a vectorilor este $3\overline{x}_1 - 2\overline{x}_2 + \overline{x}_3 = 0$.

4. Verificăm dacă singura combinaţie liniară a vectorilor A_1, A_2, A_3 care dă vectorul nul, este cea trivială. Din

$$c_1 \cdot A_1 + c_2 \cdot A_1 + c_3 \cdot A_1 = O_2 \text{ rezultă sistemul } \begin{cases} c_1 + 2c_3 = 0 \\ c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

a cărui matrice este singulară ceea ce implică faptul că cei trei vectori sunt liniar dependenţi. Aşadar sistemul este compatibil nedeterminat. Rezolvându-l, obţinem $c_1 = -2\alpha, c_2 = -3\alpha, c_3 = \alpha, \alpha \in \mathbf{R}$. Deci relaţia de liniar dependenţă a vectorilor este $-2\overline{x}_1 - 3\overline{x}_2 + \overline{x}_3 = 0$.

Exerciţiu 3.4.7. Găsiţi o bază pentru subspaţiul S a lui $\mathbf{R}^4$ care conţine toţi vectorii de forma $(a + b, a - b + 2c, b, c)$ unde $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Deoarece

$$(a + b, a - b + 2c, b, c) = a(1, 1, 0, 0) + b(1, -1, 1, 0) + c(0, 2, 0, 1),$$

rezultă că $S = \{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, 0), (0, 2, 0, 1)\}$ formează un sistem de generatori pentru subspaţiul din $\mathbf{R}^4$ pe care îl generează. Observăm că cei trei vectori sunt liniar independenţi. Aşadar, deoarece vectorii din S formează o bază pentru S, $\dim S = 3$.

Exerciţiu 3.4.8. Găsiţi dimensiunea subspaţiului lui $\mathbf{P}_3$ generat de către vectorii:

1. $x, x - 1, x^2 + 1$;
2. $x^2, x^2 - x - 1, x + 1$;
3. $x, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$;
4. $2x, x - 2$.

Soluţie. 1. Verificăm dacă vectorii sunt liniar independenţi. Din

$$c_1 \cdot x + c_2 \cdot (x - 1) + c_3 \cdot (x^2 + 1) = 0$$

rezultă sistemul $\begin{cases} c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_3 - c_2 = 0 \end{cases}$ a cărui matrice este nesingulară. Aşadar, deoarece cei trei vectori sunt liniar independenţi, ei formează o bază pentru subspaţiul generat de ei, iar $\dim \text{Span}\{x, x-1, x^2+1\} = 3$.

2. Verificăm dacă vectorii sunt liniar independenţi. Din $c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot (x^2 - x - 1) + c_3 \cdot (x+1) = 0$ rezultă sistemul $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_2 + c_3 = 0 \\ -c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$ a cărui matrice este singulară. Aşadar cei trei vectori sunt liniar dependenţi. Observăm că oricare doi vectori dintre cei trei vectori sunt liniar independenţi deoarece găsim minoranţi de ordinul doi ai matricii sistemului diferiţi de zero. Deci oricare doi vectori formează o bază pentru subspaţiul generat de ei, iar $\dim \text{Span}\{x, x-1, x^2+1\} = 2$.

Exerciţiu 3.4.9. Găsiţi o bază pentru următoarele subspaţii ale lui $\mathbf{R}^4$: $U, V, U \cap V, U + V$ unde $U = \{(u_1, u_2, 0, 0) \mid u_1, u_2 \in \mathbf{R}\}$, iar $V = \{(0, v_2, v_3, 0) \mid v_2, v_3 \in \mathbf{R}\}$.

Soluţie. Observăm că $\mathcal{B}_U = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$, iar $\mathcal{B}_V = \{(0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$. Aşadar, deoarece $U \cap V = \{(0, s, 0, 0) \mid s \in \mathbf{R}\}$, rezultă că $\mathcal{B}_{U \cap V} = \{(0,1,0,0)\}$. Analog, deoarece $U + V = \{(t_1, t_2, t_3, 0) \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}\}$, rezultă că $\mathcal{B}_{U+V} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$.

Exerciţiu 3.4.10. Grupaţi vectorii $(1,2,2), (2,5,4), (1,3,2), (2,7,4), (1,1,0)$ astfel încât să formeze o bază pentru $\mathbf{R}^3$.

Exerciţiu 3.4.11. Daţi fiind vectorii $\overline{u}_1 = (3,2)$, $\overline{u}_2 = (1,1)$ şi $\overline{x} = (7,4)$, găsiţi coordonatele lui $\overline{x}$ faţă de vectorii $\overline{u}_1$ şi $\overline{u}_2$.

Soluţie. Matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}_c = \{\overline{e}_1 = (1,0), \overline{e}_1 = (0,1)\}$ la baza $\mathcal{B} = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ este $U = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza canonică este $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Deoarece $U^{-1}\overline{x}^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, rezultă că $\overline{x} = 3\overline{u}_1 - 2\overline{u}_2$.

Exerciţiu 3.4.12. Daţi fiind vectorii $\overline{u}_1 = (1,-1)$, $\overline{u}_2 = (-2,3)$ şi $\overline{x} = (1,2)$, găsiţi coordonatele lui $\overline{x}$ faţă de vectorii $\overline{b}_1$ şi $\overline{b}_2$.

Exerciţiu 3.4.13. Găsiţi matricea de trecere corespunzătoare schimbării de bază de la $\mathcal{B}_1 = \{\overline{v}_1 = (5,2), \overline{v}_1 = (7,3)\}$ la $\mathcal{B}_2 = \{\overline{u}_1 = (3,2), \overline{u}_1 = (1,1)\}$.

Soluţie. Matricea de trecere de la $\mathcal{B}_1$ la $\mathcal{B}_2$ este

$$U^{-1}V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exerciţiu 3.4.14. Găsiţi matricea de trecere de la baza $E = \{\overline{v}_1 = (1,1,1), \overline{v}_2 = (2,3,2), \overline{v}_3 = (1,5,4)\}$ la baza $F = \{\overline{u}_1 = (1,1,0), \overline{u}_2 = (1,2,0), \overline{u}_3 = (1,2,1)\}$. Dacă $\overline{x} = 3\overline{v}_1 + 2\overline{v}_2 - \overline{v}_3$, iar $\overline{y} = \overline{v}_1 - 3\overline{v}_2 + 2\overline{v}_3$, găsiţi coordonatele lui $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ faţă de baza F.

Soluţie. Matricea de trecere de la baza E la baza F este

$$U^{-1}V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

unde $U = (\overline{u}_1|\overline{u}_2|\overline{u}_3)$, iar $V = (\overline{v}_1|\overline{v}_2|\overline{v}_3)$. Coordonatele vectorului $\overline{x}$ faţă de baza F sunt $(8,-5,3)$, iar coordonatele vectorului $\overline{y}$ faţă de baza F sunt $(-8,2,3)$.

Exerciţiu 3.4.15. În $\mathcal{P}_3$ găsiţi matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}_c = \{1, x, x^2\}$ la baza $\mathcal{B} = \{1, 2x, 4x^2 - 2\}$.

Soluţie. Deoarece $1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2, 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$, iar $4x^2 - 2 = (-2) \cdot 1 + 0 \cdot x + 4 \cdot x^2$, matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}_c$ este $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_c$ la baza $\mathcal{B}$ este $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Exerciţiu 3.4.16. Găsiţi matricea de trecere de la $\mathcal{B}_1 = \{\overline{v_1} = (4,6,7), \overline{v_2} = (0,1,1), \overline{v}_3 = (0,1,2)\}$ la $\mathcal{B}_2 = \{\overline{u}_1 = (1,1,1), \overline{u}_2 = (1,2,2), \overline{u}_3 = (2,3,4)\}$. Găsiţi coordonatele vectorului $\overline{x} = 2\overline{v}_1 + 3\overline{v}_2 - 4\overline{v}_3$ faţă de $\mathcal{B}_2$.

Exerciţiu 3.4.17. Se dau vectorii $\overline{v}_1 = (1,2), \overline{v}_2 = (2,3)$ şi matricea $S = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Găsiţi vectorii $\overline{w}_1 = (a,b), \overline{w}_2 = (c,d)$ astfel încât S să fie matricea de trecere de la baza $\{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$ la baza $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$.

Soluţie. Fie $V = (\overline{v}_1|\overline{v}_2)$, iar $W = (\overline{w}_1|\overline{w}_2)$. Deoarece $S = V^{-1}W$, rezultă că $W = V \cdot S = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$.

Exerciţiu 3.4.18. Date fiind bazele $\mathcal{B}_1 = \{1, x\}$ şi $\mathcal{B}_2 = \{2x-1, 2x+1\}$, să se determine matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_1$ la baza $\mathcal{B}_2$ şi matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_2$ la baza $\mathcal{B}_1$.

Exerciţiu 3.4.19. Găsiţi matricea de trecere de la baza canonică pentru $\mathbf{P}_3$, $\mathcal{B}_c = \{1, x, x^2\}$ la baza $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$.

Exerciţiu 3.4.20. În spaţiul vectorial $\mathbf{R}^5$ se consideră subspaţiile $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0\}$ şi $V_2 = \text{Span}\{\overline{v}_4(1,1,1,1,1), \overline{v}_5(1,-1,1,-1,1)\}$. Să se determine pentru fiecare subspaţiul complementar V_1' şi V_2'.

Soluţie. Observăm că

$$V_1 = \{\alpha \cdot \overline{v}_1(-1,0,1,0,0) + \beta \cdot \overline{v}_2(0,-1,0,1,0) + \gamma \cdot \overline{v}_3(-1,0,0,0,1) \mid \\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}.$$

Aşadar o bază pentru V_1 este $B_{V_1} = \{\overline{v}_1(-1,0,1,0,0), \overline{v}_2(0,-1,0,1,0), \overline{v}_3(-1,0,0,0,1)\}$. Extindem baza B_{V_1} la o bază pentru $\mathbf{R}^5$ adăugând celor trei vectori din B_{V_1} vectorii $\overline{v}_4(1,1,1,1,1)$ şi $\overline{v}_5(1,-1,1,-1,1)$. Observăm că vectorii $\overline{v}_i, i = \overline{1,5}$ sunt liniar independenţi şi deci ei formează o bază pentru $\mathbf{R}^5$.

Exerciţiu 3.4.21. În $\mathbf{R}^3$ se consideră subspaţiile

$$E_i = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \tfrac{x}{a_i} = \tfrac{y}{b_i} = \tfrac{z}{c_i}\},$$

$a_i, b_i, c_i \in \mathbf{R}^*$, $i = \overline{1,3}$. În ce condiţii $\mathbf{R}^3 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$?

Soluţie. Observăm că $E_i, i = \overline{1,3}$ sunt drepte prin origine. Aşadar $O(0,0,0) \in E_1 \cap E_2 \cap E_3$. Pentru a putea efectua suma directă, trebuie ca $O(0,0,0) = E_1 \cap E_2 \cap E_3$. Acest lucru este adevărat dacă vectorii directori ai celor trei drepte sunt diferiţi. Aşadar dacă $(a_1, b_1, c_1) \neq (a_2, b_2, c_2) \neq (a_3, b_3, c_3)$. Această condiţie poate fi exprimată astfel:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Exerciţiu 3.4.22. Fie subspaţiile vectoriale $E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 3x-2y = 0\}$ şi $E_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$. Să se arate că $\mathbf{R}^2 = E_1 \oplus E_2$ şi să se determine componentele vectorului (x, y) în E_1 şi E_2.

Soluţie. Observăm că E_1 şi E_2 sunt două drepte prin origine cu pante diferite. Aşadar $E_1 \cap E_2 = \{(0, 0)\}$ şi deci $\mathbf{R}^2 = E_1 \oplus E_2$. Verificăm dacă oricare vector (x, y) din $\mathbf{R}^2$ poate fi scris în mod unic sub forma

$$(x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

unde $(x_1, y_1) \in E_1$, iar $(x_2, y_2) \in E_2$. Observăm că sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ y_1 + y_2 = y \\ 3x_1 - 2y_1 = 0 \\ 2x_2 + y_2 = 0 \end{cases}$$

are o soluţie unică

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{7}(2x + y) \\ y_1 = \frac{3}{7}(2x + y) \\ x_2 = \frac{1}{7}(3x - 2y) \\ y_2 = \frac{2}{7}(2y - 3x) \end{cases}.$$

Aşadar există $E_1 \oplus E_2$. Componentele vectorului (x, y) în E_1 sunt $(x_1, y_1) \in E_1$, iar componentele vectorului (x, y) în E_2 sunt $(x_2, y_2) \in E_2$.

4 Aplicaţii liniare şi matrici

4.1 Matrici

Pentru $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$, n este numărul de linii, iar m este numărul de coloane.

Subspaţiul $< \overline{s}_j \mid 1 \leq j \leq n >$ vectorilor coloană $\overline{s}_j$ din A în F^m se numeşte **spaţiul coloanelor** din A. Dimensiunea spaţiului coloanelor $s(A) = \dim < \overline{s}_j \mid 1 \leq j \leq n >$ se numeşte **rangul coloanelor** din A.

Subspaţiul $< \overline{z}_i \mid 1 \leq i \leq m >$ vectorilor linie $\overline{z}_i$ din A în F^n se numeşte **spaţiul liniilor** din A. Dimensiunea spaţiului liniilor $z(A) = \dim < \overline{z}_i \mid 1 \leq i \leq m >$ se numeşte **rangul liniilor** din A.

4.2 Aplicaţii liniare

Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ matricea care duce un vector $\overline{v} \in F^n$ într-un vector $A \cdot \overline{v} = \overline{w} \in F^m$.

Propoziţie 4.2.1. Aplicaţia $\overline{v} \mapsto \overline{w} = A\cdot\overline{v}$ de la F^n la F^m are următoarele proprietăţi:

1. $A \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = A \cdot \overline{v} + A \cdot \overline{w}, \forall \overline{v}, \overline{w} \in F^n$;

2. $A \cdot (a \cdot \overline{v}) = a \cdot (A \cdot \overline{v}), \forall a \in F, \forall \overline{v} \in F^n$.

Aşadar, conform propoziţiei de mai sus, există aplicaţii liniare în sensul următoarei definiţii.

Definiţie 4.2.2. Fie V, W spaţii vectoriale peste F. O aplicaţie $\alpha : V \to W$ este o **aplicaţie liniară** dacă:

1. $\alpha(\overline{v} + \overline{w}) = \alpha(\overline{v}) + \alpha(\overline{w}), \forall \overline{v}, \overline{w} \in V$;

2. $\alpha(a \cdot \overline{v}) = a \cdot \alpha(\overline{v}), \forall \overline{v} \in V, \forall a \in F$.

Aplicaţia α se numeşte:

1. **epimorfism** dacă este liniară şi surjectivă;

2. **monomorfism** dacă este liniară şi injectivă;

3. **izomorfism** dacă este liniară şi bijectivă.

Două spaţii vectoriale se numesc **izomorfe** dacă există un izomorfism $\alpha : V \to W$. Notaţie: $V \cong W$.

Dăm în continuare o metodă simplă de a construi aplicaţii liniare între spaţii vectoriale. Ştiind că fiecare spaţiu vectorial are o bază (vezi Propoziţia 3.2.8), vom putea construi cu ajutorul lor aplicaţii liniare între spaţii vectoriale.

Propoziţie 4.2.3. Fie $V \neq \{\overline{0}\}$ şi W două spaţii vectoriale peste F. Fie B o bază pentru V. Dacă atribuim fiecărui vector $\overline{b} \in B$ un vector $\overline{b}'$ din W, atunci există o unică aplicaţie liniară $\alpha : V \to W$ astfel încât $\alpha(\overline{b}) = \overline{b}', \overline{b} \in B$.

Demonstraţie. Conform Propoziţiei 3.2.8, fiecare vector $\overline{v} \in V$ are reprezentarea $\overline{v} = \sum_{\overline{b} \in B} f_b \cdot \overline{b}$ unde scalarii $f_b \in F$ sunt unic determinaţi prin $\overline{v}$. Definim aplicaţia liniară α prin

$$\alpha(\overline{v}) = \sum_{\overline{b} \in B} f_b \cdot \overline{b}'.$$

Deoarece $\forall \overline{v} \in V, \overline{v} = \sum_{\overline{b} \in B} f_b \cdot \overline{b}, \alpha$ este bine definită şi $\alpha(\overline{b}) = \overline{b}', \forall \overline{b} \in B$. Pentru $\overline{w} = \sum_{\overline{b} \in B} g_b \cdot \overline{b} \in V$ şi $g_b \in F$, avem

$$\alpha(\overline{v} + \overline{w}) = \alpha(\sum_{\overline{b} \in B} [f_b + g_b] \cdot \overline{b}) =$$

$$= \sum_{\overline{b} \in B} [f_b + g_b] \cdot \overline{b}' =$$

$$= \sum_{\overline{b} \in B} f_b \cdot \overline{b}' + \sum_{\overline{b} \in B} g_b \cdot \overline{b}' =$$

$$= \alpha(\overline{v}) + \alpha(\overline{w}).$$

Mai departe, avem, $\forall \overline{v} \in V, \forall f \in F$,

$$\alpha(f \cdot \overline{v}) = \alpha(\sum_{\overline{b} \in B} [f \cdot f_b] \cdot \overline{b}) =$$

$$= \sum_{\overline{b} \in B} [f \cdot f_b] \cdot \overline{b}' =$$

$$= f \cdot \alpha(\overline{v}).$$

Presupunem că există $\beta : V \to W, \beta(\overline{b}) = \overline{b}', \forall \overline{b} \in B$. Atunci avem:

$$\beta(\overline{v}) = \beta(f_b \cdot \overline{b})$$

$$= \sum_{\overline{b} \in B} f_b \cdot \beta(\overline{b}) =$$

$$= \sum_{\overline{b} \in B} f_b \cdot \overline{b}' = \alpha(\overline{v}).$$

Deci $\beta = \alpha$. □

Exemplu 4.2.4. 1. $\alpha : F^3 \to F, \alpha(r_1, r_2, r_3) = r_1 + r_2 + r_3$ este o aplicaţie liniară.

2. $\alpha : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \alpha(r_1, r_2) = (r_1 + 1, r_2 + 1)$ nu este o aplicaţie liniară deoarece, de exemplu, $2 \cdot \alpha(1, 1) = (4, 4)$ iar $\alpha[2 \cdot (1, 1)] = (3, 3)$.

Definiţie 4.2.5. Fie $\alpha : V \to W$ o aplicaţie liniară. Mulţimea

$$\mathrm{Ker}\alpha = \{\overline{\mathrm{v}} \in \mathrm{V} \mid \alpha(\overline{v}) = \overline{0}_W\}$$

se numeşte **nucleul** lui α. Mulţimea

$$\mathrm{Im}\alpha = \{\alpha(\overline{\mathrm{v}}) \in \mathrm{W} \mid \overline{v} \in V\}$$

se numeşte **imaginea** lui α.

Propoziţie 4.2.6. Fie $\alpha : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci avem:

1. $\mathrm{Ker}\alpha \leq \mathrm{V}$;

2. $\mathrm{Ker}\alpha = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha$ este injectivă;

3. $\forall U \leq V, \alpha(U) \leq W$;

4. $\mathrm{Im}\alpha = \mathrm{W} \Leftrightarrow \alpha$ este surjectivă;

5. $\alpha^{-1}(Z) = \{\overline{v} \in V \mid \alpha(\overline{v}) \in Z\} \leq V, Z \leq W$.

Demonstraţie. 1. Deoarece $\alpha(\overline{0}) = \alpha(0 \cdot \overline{v}) = 0 \cdot \alpha(\overline{v}) = \overline{0}$, avem $\overline{0} \in \text{Ker}\alpha$.

Mai departe, $\forall v_1, v_2 \in \text{Ker}\alpha, \alpha(\text{v}_1 + \text{v}_2) = \alpha(\text{v}_1) + \alpha(\text{v}_2) = \overline{0}$. Astfel $v_1 + v_2 \in \text{Ker}\alpha$.

Pe de altă parte, $\forall a \in F, \forall \overline{v} \in \text{Ker}\alpha, \alpha(\text{a}\overline{\text{v}}) = \text{a}\alpha(\overline{\text{v}}) = \text{a} \cdot \overline{0} = \overline{0}$. Astfel $a\overline{v} \in \text{Ker}\alpha$.

În concluzie, $\text{Ker}\alpha \leq \text{V}$.

2. $\Rightarrow$ α fiind injectivă,

$$\alpha(\overline{a}) = \overline{0} \text{ pentru } \overline{a} = \overline{0}.$$

Astfel $\text{Ker}\alpha = \overline{0}$.

$\Leftarrow$ Dacă $\alpha(\overline{v}) = \alpha(\overline{w}), \overline{v}, \overline{w} \in V$, atunci avem $\overline{0} = \alpha(\overline{v}) - \alpha(\overline{w}) = \alpha(\overline{v} - \overline{w})$. Astfel $\overline{v} - \overline{w} \in \text{Ker}\alpha = \overline{0}$. Deci $\overline{v} = \overline{w}$ şi astfel α este injectivă.

3. Deoarece $\alpha(\overline{0}) = \overline{0}, \overline{0} \in \alpha(U)$. Astfel $\alpha(U) \neq \emptyset$.

Fie $\overline{w}_1, \overline{w}_2 \in \alpha(U)$. Atunci există $\overline{v}_1, \overline{v}_2 \in U$ astfel încât $\overline{w}_i = \alpha(\overline{v}_i), i = \overline{1,2}$. Astfel $\overline{w}_1 + \overline{w}_2 = \alpha(\overline{v}_1) + \alpha(\overline{v}_2) = \alpha(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) \in \alpha(U)$.

Mai departe, $\forall a \in F, a\overline{w}_1 = a\alpha(\overline{v}_1) = \alpha(a\overline{v}_1) \in \alpha(U)$.

În concluzie $\alpha(U) \leq W$.

4. Dacă $\text{Im}\alpha = \alpha(\text{V})$, deoarece, conform punctului precedent, $\alpha(V) \leq W$, avem $\text{Im}\alpha \leq \text{W}$. Astfel $\text{Im}\alpha = \text{W} \Leftrightarrow \alpha$ este surjectivă.

5. Fie $Z \leq W$. Atunci $\overline{0} = \alpha(\overline{0}) \in Z$ şi astfel $\overline{0} \in \alpha^{-1}(Z)$.

Fie $\overline{u}, \overline{v} \in \alpha^{-1}(Z)$. Atunci $\alpha(\overline{u}), \alpha(\overline{v}) \in Z$. Deoarece $Z \leq W, \alpha(\overline{u}+\overline{v}) = \alpha(\overline{u}) + \alpha(\overline{v}) \in Z$. Atunci $\overline{u} + \overline{v} \in \alpha^{-1}(Z)$.

Fie $a \in F$ şi $\overline{u} \in \alpha^{-1}(Z)$. Atunci $\alpha(a\overline{u}) = a\alpha(\overline{u}) \in Z$. Astfel $a\overline{u} \in \alpha^{-1}(Z)$.

În concluzie $\alpha^{-1}(Z) \leq V$.

□

Propoziţie 4.2.7. Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$. Atunci avem:

1. Imaginea aplicaţiei liniare $\overline{v} \mapsto A\overline{v}$ de la F^n la F^m este spaţiul coloanelor matricii A;

2. Nucleul aceleiaşi aplicaţii liniare este mulţimea soluţiilor sistemului omogen de ecuaţii $A\overline{x} = \overline{0}$.

Pentru $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$, numim mulţimea soluţiilor sistemului omogen de ecuaţii $A\overline{x} = \overline{0}$, **spaţiul nul** al matricii A şi îl notăm cu $\mathrm{Null(A)} = \{\overline{\mathrm{x}} \mid A\overline{x} = \overline{0}\}$. Observăm că Null(A) = KerA.

Propoziţie 4.2.8. Fie $(H) : A\overline{x} = \overline{0}$ sistemul omogen de ecuaţii obţinut din sistemul de ecuaţii $(G) : A\overline{x} = \overline{d}$. Atunci avem:

1. KerA este mulţimea soluţiilor lui (H);

2. Dacă $\overline{a}$ este o soluţie pentru (G), atunci $\overline{a}+\mathrm{KerA} = \{\overline{\mathrm{a}}+\overline{\mathrm{b}} \mid \overline{b} \in \mathrm{KerA}\}$ este mulţimea soluţiilor pentru (G).

Problema studiului dependenţei liniare a unei mulţimi de vectori dintr-un spaţiu vectorial de dimensiune finită poate fi redusă la stabilirea soluţiei unui sistem omogen de ecuaţii.

Propoziţie 4.2.9. Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$. $\mathrm{KerA} = \{\overline{0}\}$ dacă şi numai dacă coloanele lui A sunt vectori liniar independenţi.

Demonstraţie. Fie $\overline{s}_j, j \in \overline{1,n}$ vectorii coloană ai matricii A şi fie $\overline{v} \in F^n$. Cum $A\overline{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j\overline{s}_j$,

$$\overline{v} \in \mathrm{KerA} \Leftrightarrow \textstyle\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{v_j}\overline{\mathrm{s}}_{\mathrm{j}} = \overline{0}.$$

$\Rightarrow$ Dacă coloanele lui A sunt liniar independente, atunci $v_1 = ... = v_n = 0$. Deci $\overline{v} = \overline{0}$. Dar $\overline{v} \in \mathrm{KerA}$. Astfel $\mathrm{KerA} = \{\overline{0}\}$.

$\Leftarrow$ Presupunem că coloanele lui A sunt liniar dependente. Atunci există $v_1, ..., v_n \in F$ nu toţi simultan egal cu 0 astfel încât $\sum_{j=1}^{n} v_j\overline{s}_j = \overline{0}$. Astfel $\{\overline{0}\} \neq \overline{v}(v_1, ..., v_n) \in \mathrm{KerA}$. Dar, cum $\mathrm{KerA} = \{\overline{0}\}$, am obţinut o contradicţie. Aşadar coloanele lui A sunt liniar independente. □

Exemplu 4.2.10. Vectorii $\overline{v}_1(2, 1, 0), \overline{v}_2(1, 0, 1)$ şi $\overline{v}_3(3, 1, 1)$ sunt liniar dependenţi deoarece spaţiul nul al matricii $A = [\overline{v}_1|\overline{v}_2|\overline{v}_3]$, $\mathrm{Null(A)} = \{\overline{0}(0, 0, 0), \overline{\mathrm{f}}(1, 1, -1)\}$.

Conform Propoziţiei 4.2.6, nucleul şi imaginea unei aplicaţii liniare sunt subspaţii vectoriale. Dimensiunile acestor subspaţii vectoriale verifică următoarele relaţii.

Propoziţie 4.2.11. Fie V şi W două subspaţii vectoriale peste F. Fie $\alpha : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci:

1. $\dim V = \dim \mathrm{Ker}\alpha + \dim \mathrm{Im}\alpha$;

2. $\dim \mathrm{Im}\alpha \leq \dim \mathrm{W}$.

Propoziţie 4.2.12. Fie V şi W două subspaţii vectoriale peste F de dimensiune n. Fie $\alpha : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. α este injectivă;

2. α este surjectivă;

3. α este bijectivă;

4. Dacă $B = \{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n\}$ este o bază pentru V, atunci $\alpha(B) = \{\alpha(\overline{v}_1), ..., \alpha(\overline{v}_n)\}$ este o bază pentru W.

Demonstraţie. 1. 1. $\Rightarrow$ [2., 3.] Cum α este injectivă, conform Propoziţiei 4.2.6, $\mathrm{Ker}\alpha = \{\overline{0}\}$. Atunci, conform Propoziţiei 4.2.11, $n = \dim V = \dim W = \dim \alpha(V)$. Astfel, conform Corolarului 3.2.13 (3), $W = \alpha(V)$ şi deci α este surjectivă. Cum este şi injectivă, ea este bijectivă.

2. 4. $\Rightarrow$ 2. Deoarece $n = \dim \alpha(V) = \dim W$, conform Corolarului 3.2.13 (3), $W = \alpha(V)$ şi deci α este surjectivă.

3. 1. $\Rightarrow$ 4. Cum $\overline{0} = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \alpha(\overline{v}_i) = \alpha(\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \overline{v}_i)$. Deci

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i \cdot \overline{v}_i} \in \mathrm{Ker}\alpha.$$

Dar, conform 1., $\mathrm{Ker}\alpha = \{\overline{0}\}$. Astfel rezultă că $f_i = 0, \forall f_i \in F, i = \overline{1,n}$. Aşadar, deoarece vectorii $\{\alpha(\overline{v}_1), ..., \alpha(\overline{v}_n)\}$ sunt liniar independenţi, ei formează o bază pentru W.

□

Propoziţie 4.2.13. Două spaţii vectoriale finit dimensionale peste acelaşi corp sunt izomorfe dacă şi numai dacă au aceeaşi dimensiune.

Definiţie 4.2.14. Fie V şi W două spaţii vectoriale şi fie $\alpha : V \to W$ o aplicaţie liniară. **Rangul** lui α este $\mathrm{rg}\alpha = \dim \mathrm{Im}\alpha$.

4.3 Matricea unei aplicaţii liniare

În acest paragraf vom studia legătura dintre aplicaţii liniare $\alpha : V \to W$ între două spaţii vectoriale de dimensiune finită şi matricile $A = (a_{ij}), a_{ij} \in F$. În acest scop, vom fixa o bază $\mathcal{B} = \{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r\}$ în V şi o bază $\mathcal{B}' = \{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_s\}$ în W. Astfel vom putea atribui aplicaţiei liniare α o matrice A care conţine toate informaţiile despre α. Matricea A nu depinde doar de α ci şi de bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ pe care le-am ales în V respectiv W. Tot în acest paragraf vom analiza cum se modifică matricea A dacă alegem alte baze.

Fie $\alpha : V \to W$ o aplicaţie liniară. Fixăm bazele $\mathcal{B} = \{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r\}$ în V şi respectiv $\mathcal{B}' = \{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_s\}$ în W. Pentru fiecare vector $\overline{u}_j \in \mathcal{B}, j = \overline{1, r}$, $\alpha(\overline{u}_j) \in W$. Aşadar, conform Corolarului 3.2.13 (1), $\alpha(\overline{u}_j)$ poate fi scris în mod unic ca şi combinaţia liniară

$$\alpha(\overline{u}_j) = \textstyle\sum_{i=1}^{s} a_{ij}\overline{v}_i, a_{ij} \in F, i = \overline{1, s}, j = \overline{1, r}.$$

Matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{s\times r}(F)$ se numeşte **matricea lui α relativ la bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$**. Vom scrie $A = A_\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Exemplu 4.3.1. Fie

$$V = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 | a + b + c = 0\} \leq \mathbf{R}^3$$

şi

$$W = \{(r, s, t, u) \in \mathbf{R}^4 | r + s + t + u = 0\} \leq \mathbf{R}^4.$$

Fixăm

$$\mathcal{B} = \{\overline{u}_1(1, -1, 0), \overline{u}_2(1, 0, -1)\}$$

bază pentru V şi

$$\mathcal{B}' = \{\overline{v}_1(1,-1,0,0), \overline{v}_2(1,0,-1,0), \overline{v}_3(1,0,0,-1)\}$$

bază pentru W. Fie $\alpha : V \to W, \alpha(a,b,c) = (a-2b-c, 2a-b-c, -a-b, -6a-2c)$ o aplicaţie liniară relativ la bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$. Prima coloană a matricii corespunzătoare aplicaţiei α este

$$\alpha(\overline{u}_1) = \alpha(1,-1,0) = (3,3,0,-6) == \\ x \cdot (1,-1,0,0) + y \cdot (1,0,-1,0) + z \cdot (1,0,0,-1).$$

Deci

$$\alpha(\overline{u}_1) = -3 \cdot \overline{v}_1 + 0 \cdot \overline{v}_2 + 6 \cdot \overline{v}_3.$$

Analog, cea de-a doua coloană a matricii A este

$$\alpha(\overline{u}_2) = \alpha(1,0,-1) = (2,3,-1,-4) = -3 \cdot \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + 4 \cdot \overline{v}_3.$$

Aşadar

$$A = A_\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = [\alpha(\overline{u}_1)|\alpha(\overline{u}_2)] = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

⋆ Dacă este dată $A = A_\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in \mathcal{M}_{r \times s}(F)$, atunci pentru orice vector $\overline{u} \in V$, se poate calcula $\alpha(\overline{u})$ după cum urmează. Conform Corolarului 3.2.13 (1)

$$\overline{u} = \sum_{j=1}^{r} a_j \overline{u}_j, \overline{a} \in F^r.$$

Aşadar $A \cdot \overline{a} = \overline{b}(b_1, ..., b_s) \in F^s$. Fie

$$\overline{v} = \sum_{i=1}^{s} b_i \overline{v}_i.$$

Astfel

$$\alpha(\overline{u}) = \alpha(\sum_{j=1}^{r} a_j \overline{u}_j) = \sum_{j=1}^{r} a_j \alpha(\overline{u}_j) = \\ = \sum_{j=1}^{r} a_j (\sum_{i=1}^{s} a_{ij} \overline{v}_i) = \sum_{i=1}^{s} \overline{v}_i (\sum_{j=1}^{r} a_{ij} a_j) = \sum_{i=1}^{s} b_i \overline{v}_i = \overline{v}.$$

Exemplu 4.3.2. (vezi exemplu 4.3.1) Pentru $\overline{u}(2,3,-5) \in V$, să se calculeze $\alpha(\overline{u}) \in W$.

Observăm că, deoarece $\mathcal{B} = \{\overline{u}_1(1,-1,0), \overline{u}_2(1,0,-1)\}$ este o bază pentru V, $\overline{u} = -3 \cdot \overline{u}_1 + 5 \cdot \overline{u}_2$.

Pentru a afla pe $\alpha(\overline{u})$, vom calcula $A \cdot \overline{u} = \overline{b}$. Obţinem

$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Deci $\overline{b}(-6,5,2)$. Aşadar

$$\alpha(\overline{u}) = -6\cdot\overline{v}_1+5\cdot\overline{v}_2+2\cdot\overline{v}_3 = -6\cdot(1,-1,0,0)+5\cdot(1,0,-1,0)+2\cdot(1,0,0,-1) =$$
$$= (1,6,-5,-2).$$

Definiţie 4.3.3. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r\}$ şi $\mathcal{B}' = \{\overline{u}'_1, ..., \overline{u}'_r\}$ două baze ale $F-$spaţiului vectorial V. Pentru fiecare $j = \overline{1,r}$,

$$\overline{u}'_j = \sum_{i=1}^{r} p_{ij} \cdot \overline{u}_i,$$

scalarii $p_{ij} \in F$ fiind aleşi convenabil. Matricea $P = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_{r\times r}(F)$ se numeşte **matricea schimbării de bază de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$**.

De remarcat la definiţia matricii $P = (p_{ij})$ a schimbării de bază de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$ faptul că aplicaţia liniară $\alpha : V \to V$ relativ la matricea P duce baza $\mathcal{B}$ în noua bază $\mathcal{B}'$, adică $\alpha(\overline{u}_j) = \overline{u}'_j$, $j = \overline{1,r}$ şi $A_\alpha(\mathcal{B},\mathcal{B}) = P$. Conform Propoziţiei 4.2.3, aplicaţia liniară $\alpha : V \to V$ este unic determinată prin atribuirea vectorilor $\overline{u}_j$, $j = \overline{1,r}$ din baza $\mathcal{B}$, $\alpha(\overline{u}_j) = \overline{u}'_j$.

Propoziţie 4.3.4. Matricea P a schimbării de bază de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$ este inversabilă. Inversa sa este matricea schimbării de bază de la $\mathcal{B}'$ la $\mathcal{B}$.

Propoziţie 4.3.5. Fie V şi W două spaţii vectoriale şi fie $\alpha : V \to W$ o aplicaţie liniară. Fie $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}'_1$ două baze pentru V şi fie $\mathcal{B}_2$ şi $\mathcal{B}'_2$ două baze pentru W. Fie P matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_1$ la baza $\mathcal{B}'_1$. Fie Q matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_2$ la baza $\mathcal{B}'_2$. Atunci

$$A_\alpha(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) = Q^{-1} \cdot A_\alpha(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \cdot P.$$

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_1 = \{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r\}$ şi fie $\mathcal{B}'_1 = \{\overline{u}'_1, ..., \overline{u}'_r\}$.

Fie $\mathcal{B}_2 = \{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_s\}$ şi fie $\mathcal{B}'_2 = \{\overline{v}'_1, ..., \overline{v}'_s\}$.

Fie $A = A_\alpha(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = (a_{ij})$ şi fie $A' = A_\alpha(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) = (a'_{ij})$.

Conform definiţiei matricii schimbării de bază, avem:

$$\overline{u}'_j = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}\overline{u}_i$$

şi

$$\overline{v}'_i = \sum_{i=1}^{r} q_{ji}\overline{v}_j.$$

Astfel

$$\alpha(\overline{u}'_j) = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}\alpha(\overline{u}_i) = \sum_{i=1}^{r} p_{ij} \sum_{k=1}^{s} a_{ki}\overline{v}_k = \sum_{k=1}^{s} \overline{v}_k(\sum_{i=1}^{r} a_{ki}p_{ij}).$$

Analog

$$\alpha(\overline{u}'_j) = \sum_{i=1}^{r} a'_{ij}\overline{v}'_i = \sum_{i=1}^{r} a'_{ij} \sum_{k=1}^{s} q_{ki}\overline{v}_k = \sum_{k=1}^{s} \overline{v}_k(\sum_{i=1}^{r} q_{ki}a'_{ij}).$$

Conform Corolarului 3.2.13 (1), avem

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ki}p_{ij} = \sum_{i=1}^{r} q_{ki}a'_{ij},$$

$k = \overline{1,s}, j = \overline{1,r}$. Aşadar, deoarece elementul de pe poziţia (k, j) a matricii AP coincide cu elementul de pe poziţia (k, j) a matricii QA', rezultă că

$$AP = QA'.$$

Deci

$$A_\alpha(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) = Q^{-1} \cdot A_\alpha(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \cdot P.$$

□

Propoziţie 4.3.6. Fie V, W şi Z F-spaţii vectoriale finit dimensionale şi fie $\mathcal{B}_1 = \{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\overline{w}_1, ..., \overline{w}_m\}$ respectiv $\mathcal{B}_3 = \{\overline{z}_1, ..., \overline{z}_p\}$ baze pentru aceste spaţii vectoriale. Fie $\alpha : V \to W$ şi $\beta : W \to Z$ aplicaţii liniare şi fie $A_\alpha(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ şi $A_\beta(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ matricile lor relativ la bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ respectiv $\mathcal{B}_3$. Atunci $\beta\alpha : V \to Z$ este o aplicaţie liniară ce are relativ la bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3$ matricea $A_{\beta\alpha}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3) = A_\beta(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) \cdot A_\alpha(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

4.4 Rangul unei matrici

Pentru orice matrice A rangul coloanelor $s(A)$ (dimensiunea subspaţiului generat de vectorii coloană ai matricii) coincide cu rangul liniilor $z(A)$ (dimensiunea subspaţiului generat de vectorii linie ai matricii).

Propoziţie 4.4.1. Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$. Atunci $s(A) = z(A)$.

Definiţie 4.4.2. Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$. Valoarea $\mathrm{rgA} = \mathrm{s(A)} = \mathrm{z(A)}$ se numeşte **rangul** matricii A.

Exemplu 4.4.3. 1. Dacă $A = 0_n$, $\mathrm{rgA} = 0$.

2. Dacă $A = I_n$, $\mathrm{rgA} = \mathrm{n}$.

3. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, deoarece coloanele matricii sunt vectori liniar independenţi, $\mathrm{rgA} = 2$.

Corolar 4.4.4. Fie V, W F-spaţii vectoriale finit dimensionale, fie $\mathcal{B}_1$ o bază pentru V şi fie $\mathcal{B}_2$ o bază pentru W. Fie $\alpha : V \to W$ o aplicaţie liniară şi fie $A = A_\alpha(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ matricea lui α relativ la bazele $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$. Atunci $\mathrm{rg}\alpha = \mathrm{rgA}$.

Corolar 4.4.5. Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$. Atunci:

1. $\mathrm{rgA} = \mathrm{rgA}^{\mathrm{T}}$;

2. $\mathrm{rgA} \leq \min\{\mathrm{m}, \mathrm{n}\}$;

3. $\mathrm{rg(A \cdot B)} \leq \min\{\mathrm{rgA}, \mathrm{rgB}\}, \forall \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{\mathrm{n\times p}}(\mathrm{F})$;

4. $\forall B \in \mathcal{M}_{m\times m}(F), C \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ matrici inversabile, $\mathrm{rgBA} = \mathrm{rgA} = \mathrm{rgAC}$;

5. Mulţimea soluţiilor KerA a sistemului omogen de ecuaţii (H) : $Ax = 0$ are $n - \mathrm{rgA}$ soluţii liniar independente.

Propoziţie 4.4.6. Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. A este inversabilă;

2. există $S \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ astfel încât $AS = I_n$;

3. există $T \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ astfel încât $TA = I_n$;

4. rgA = n.

4.5 Echivalenţa şi asemănarea matricilor

Definiţie 4.5.1. Două matrici $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ se numesc **echivalente** dacă există două matrici inversabile $Q \in \mathcal{M}_{m\times m}(F)$ şi $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ astfel încât $B = Q \cdot A \cdot P$. Notaţie: $A \sim B$.

Conform Propoziţiei 4.2.1 şi a Propoziţiei 4.3.5, asemănarea a două matrici $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ înseamnă că matricile A şi B corespund, relativ la anumite baze din $V = F^n$ respectiv $W = F^m$, aceleiaşi aplicaţii liniare $\alpha : V \to W$.

Corolar 4.5.2. 1. Fiecare matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ cu rgA = r este echivalentă cu matricea $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2. pentru oricare $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$, $A \sim B$ dacă şi numai dacă rgA = rgB = r.

Definiţie 4.5.3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$. Spunem că matricile A şi B sunt **asemenea** dacă există o matrice inversabilă $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ astfel încât $B = P^{-1}AP$.

⋆ Două matrici asemenea sunt echivalente.

⋆ Două matrici asemenea au acelaşi rang.

Definiţie 4.5.4. **Urma** unei matrici $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$, $A = (a_{ij})$ este

$$\mathrm{trA} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Propoziţie 4.5.5. Două matrici asemenea A, B au aceeaşi urmă, acelaşi rang şi acelaşi determinant.

Definiţie 4.5.6. Fie $\alpha : V \to V$ un endomorfism, fie $\mathcal{B}$ o bază pentru V şi fie $A = A_\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Atunci $\mathrm{tr}\alpha = \mathrm{trA}$ se numeşte **urma** lui α.

4.6 Exerciţii

Exerciţiu 4.6.1. Verificaţi dacă următoarele aplicaţii sunt liniare:

1. $M : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, M((x_1, x_2)) = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$;

2. $M : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, M(x_1, x_2) = (x_2, x_1, x_1 + x_2)$;

3. $M : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, M(\overline{x}) = \overline{x} + \overline{a}, \forall \overline{a} \in \mathbf{R}^2$.

Soluţie. 1. Observăm că $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, M(\alpha \cdot \overline{x}) = |\alpha| \cdot M(\overline{x}) \neq \alpha \cdot M(\overline{x})$. Aşadar M nu este aplicaţie liniară.

2. Observăm că $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{R}^2, M(\overline{x} + \overline{y}) = M(\overline{x}) + M(\overline{y})$ şi $M(\alpha \cdot \overline{x}) = \alpha \cdot M(\overline{x})$. Deci M este o aplicaţie liniară.

Exerciţiu 4.6.2. Fie $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un operator liniar. Ştiind că $L(1, 2) = (-2, 3)$ şi $L(1, -1) = (5, 2)$, să se calculeze $L(7, 5)$.

Soluţie. Deoarece L este operator liniar, există $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ astfel încât $L(7, 5) = \alpha L(1, 2) + \beta L(1, -1)$. Înlocuind, obţinem $\alpha = 4$ şi $\beta = 3$ şi deci $L(7, 5) = (7, 18)$.

Exerciţiu 4.6.3. Să se calculeze nucleul şi imaginea pentru următorii operatori liniari:

1. $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1, x_1)$;

2. $L : S \to \mathbf{R}^3, S \leq \mathbf{R}^3, S = \text{Span}\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}, L(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$;

3. $L : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_3, L(p(x)) = xp'(x)$ ($\mathbf{P}_{k+1}$ este mulţimea polinoamelor de grad k);

4. $L : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_3, L(p(x)) = p(0)x + p(1)$;

5. $L : S \to \mathbf{R}^3, S \leq \mathbf{R}^3, S = \text{Span}\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}, L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$;

6. $L : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_3, L(p(x)) = p(x) - p'(x)$;

7. $L : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_3, L(p(x)) = p(0)x + p(1)$.

Soluţie. 1. Conform definiţiei, $\text{Ker } L = \{\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid L(\overline{x}) = \overline{0}\} = \{\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_1, x_1) = \overline{0}\} = \{\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0\} = \{\alpha \cdot (1, 0, 0) + \beta \cdot (0, 1, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = \text{Span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

Conform definiţiei, $\text{Im } L = \{\overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \mid \exists\, \overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ astfel încât $L(\overline{x}) = \overline{y}\} = \{\overline{y} = (y_1, y_1, y_1) \mid y_1 \in \mathbf{R}\} = \{\alpha \cdot (1, 1, 1) \mid \alpha \in \mathbf{R}\} = \text{Span}\{(1, 1, 1)\}$.

2. Conform definiţiei, Ker $L = \{\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid L(\overline{x}) = \overline{0}\} = \{(0,0,0)\}$.

   Conform definiţiei, Im $L = \{\overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \mid \exists\ \overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S$ astfel încât $L(\overline{x}) = \overline{y}\} = \{\overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \mid L(x_1, x_2, 0) = (y_1, y_2, y_3), (x_1, x_2, 0) \in S\} = \{(0, x_2, x_1) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\} = \{\alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Span}\{\overline{\mathrm{e}}_2, \overline{\mathrm{e}}_3\}$.

3. Conform definiţiei, Ker $L = \{p(x) \in \mathbf{P}_3 \mid L(p(x)) = 0\} = \{p(x) \in \mathbf{P}_3 \mid xp'(x) = 0\} = \{p(x) \in \mathbf{P}_3 \mid p(x)$ constant $\} = \mathbf{P}_1$.

   Conform definiţiei, Im $L = \{q(x) \in \mathbf{P}_3 \mid \exists\ p(x) \in \mathbf{P}_3$ astfel încât $L(p(x)) = q(x)\} = \{q(x) \in \mathbf{P}_3 \mid \exists\ p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{P}_3$ astfel încât $xp'(x) = q(x)\} = \{q(x) \in \mathbf{P}_3 \mid \exists\ p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{P}_3$ astfel încât $2ax^2 + bx = q(x)\} = \mathrm{Span}\{\mathrm{x}, \mathrm{x}^2\}$.

4. Conform definiţiei, Ker $L = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{P}_3 \mid L(p(x)) = 0\} = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{P}_3 \mid p(0)x + p(1) = 0\} = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{P}_3 \mid cx + a + b + c = 0\} = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{P}_3 \mid c = 0, a = -b\} = \{\alpha \cdot x - \alpha \cdot x^2 \mid \alpha \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Span}\{\mathrm{x} - \mathrm{x}^2\}$.

   Conform definiţiei, Im $L = \{q(x) \in \mathbf{P}_3 \mid \exists\ p(x) \in \mathbf{P}_3$ astfel încât $L(p(x)) = q(x)\} = \{q(x) \in \mathbf{P}_3 \mid \exists\ p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{P}_3$ astfel încât $p(0)x + p(1) = q(x)\} = \{q(x) \in \mathbf{P}_3 \mid \exists\ p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{P}_3$ astfel încât $cx + a + b + c = q(x)\} = \mathrm{Span}\{1, \mathrm{x}\}$.

Exerciţiu 4.6.4. Se dă aplicaţia liniară $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2, L(\overline{x}) = x_1\overline{b}_1 + (x_2 + x_3)\overline{b}_2)\forall \overline{x} \in \mathbf{R}^3$, unde $\overline{b}_1 = (1,1), \overline{b}_2 = (-1,1)$. Găsiţi matricea corespunzătoare lui L faţă de bazele $E = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ şi $B = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2\}$.

Soluţie. Observăm că $L(\overline{e}_1) = 1 \cdot \overline{b}_1 + 0 \cdot \overline{b}_2, L(\overline{e}_2) = 0 \cdot \overline{b}_1 + 1 \cdot \overline{b}_2$, iar $L(\overline{e}_3) = 0 \cdot \overline{b}_1 + 1 \cdot \overline{b}_2$. Aşadar matricea corespunzătaore lui L faţă de bazele E şi B este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exerciţiu 4.6.5. Se dă aplicaţia liniară $L : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_2, L(p(x)) = p'(x), \forall p(x) \in \mathbf{P}_3$.

1. Găsiţi matricea corespunzătoare lui L faţă de bazele canonice $B_1 = \{x^2, x, 1\}$ şi $B_2 = \{x, 1\}$;

2. Fie $p(x) = ax^2 + bx + c$. Găsiţi coordonatele vectorului $L(p(x))$ faţă de baza B_2.

Soluţie. 1. Observăm că $L(x^2) = 2 \cdot x + 0 \cdot 1, L(x) = 0 \cdot x + 1 \cdot 1$, iar $L(1) = 0 \cdot x + 0 \cdot 1$. Aşadar matricea corespunzătaore lui L faţă de bazele B_1 şi B_2 este $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Observăm că coordonatele vectorului $L(p(x))$ faţă de baza B_1 sunt (a, b, c). Coordonatele vectorului $L(p(x))$ faţă de baza B_2 le obţinem efectuând înmulţirea $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}$.

Exerciţiu 4.6.6. Găsiţi matricea A corespunzătoare următorilor operatori liniari $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ relativ la bazele canonice pentru $\mathbf{R}^3$ şi $\mathbf{R}^2$.

1. $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 0)$;

2. $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$;

3. $L(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2)$;

Soluţie. 1. Deoarece $L(1, 0, 0) = (1, 0), L(0, 1, 0) = (0, 1)$, iar $L(0, 0, 1) = (0, 0)$, obţinem $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exerciţiu 4.6.7. Găsiţi matricea A corespunzătoare următorilor operatori liniari $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ relativ la baza canonica pentru $\mathbf{R}^3$.

1. $L(x_1, x_2, x_3) = (2x_3, x_2 + 3x_1, 2x_1 - x_3)$;

2. $L(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_1 - x_3, 2x_3 - x_1 - x_2)$;

Pentru operatorii liniari de mai sus, calculaţi $L(\overline{x})$, pentru $\overline{x} = (1, 1, 1), \overline{x} = (2, 1, 1), \overline{x} = (-5, 3, 2)$.

Soluţie. 1. Deoarece $L(1, 0, 0) = (0, 3, 2)$, $L(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$, iar $L(0, 0, 1) = (2, 0, -1)$, obţinem $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pentru a calcula $L(1, 1, 1)$, efectuăm înmulţirea $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Aşadar $L(1, 1, 1) = (2, 4, 1)$. Analog obţinem $L(2, 1, 1) = (1, 7, 3)$ şi $L(-5, 3, 2) = (4, -12, -12)$.

Exerciţiu 4.6.8. Se dau vectorii $\overline{y}_1 = (1,1,1)$, $\overline{y}_2 = (1,1,0)$, $\overline{y}_1 = (1,0,0)$ şi operatorul identitate $I : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Exprimaţi vectorii $I(1,0,0)$, $I(0,1,0)$ şi $I(0,0,1)$ în funcţie de vectorii $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3$.

Soluţie. Observăm că $I(1,0,0) = 0 \cdot \overline{y}_1 + 0 \cdot \overline{y}_2 + 1 \cdot \overline{y}_3, I(0,1,0) = 0 \cdot \overline{y}_1 + 1 \cdot \overline{y}_2 - 1 \cdot \overline{y}_3$, iar $I(0,0,1) = 1 \cdot \overline{y}_1 - 1 \cdot \overline{y}_2 + 0 \cdot \overline{y}_3$.

Exerciţiu 4.6.9. Se dau vectorii $\overline{y}_1 = (1,1,1)$, $\overline{y}_2 = (1,1,0)$, $\overline{y}_1 = (1,0,0)$ şi operatorul liniar $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $L(c_1\overline{y}_1 + c_2\overline{y}_2 + c_3\overline{y}_3) = (c_1 + c_2 + c_3)\overline{y}_1 + (2c_1 + c_3)\overline{y}_2 - (2c_2 + c_3)\overline{y}_3$.

1. Găsiţi matricea corespunzătoare lui L faţă de baza $\{\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3\}$.

2. Scrieţi vectorul $\overline{x} = (7,5,2)$ ca o combinaţie liniară a vectorilor $\overline{y}_1, \overline{y}_2$ şi $\overline{y}_3$ şi folosiţi matricea A pentru a calcula $L(\overline{x})$.

Soluţie. 1. Observăm că $L(\overline{y}_1) = \overline{y}_1 + 2 \cdot \overline{y}_2 + 0 \cdot \overline{y}_3$, $L(\overline{y}_2) = \overline{y}_1 + 0 \cdot \overline{y}_2 - 2 \cdot \overline{y}_3$, iar $L(\overline{y}_3) = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 - \overline{y}_3$. Aşadar $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Observăm că $\overline{x} = 2 \cdot \overline{y}_1 + 3 \cdot \overline{y}_2 + 2 \cdot \overline{y}_3$. În continuare, observăm că $L(\overline{x}) = A\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Exerciţiu 4.6.10. Se dă aplicaţia liniară $L : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_2, L(p(x)) = p'(x) + p(0)$.

1. Găsiţi matricea A corespunzătoare lui L faţă de bazele ordonate $E = \{x^2, x, 1\}$ şi $F = \{2, 1 - x\}$.

2. Pentru fiecare dintre vectorii $p(x) \in \mathbf{P}_3$, găsiţi coordonatele vectorului $L(p(x))$ faţă de baza $\{2, 1 - x\}$ din $\mathbf{P}_2$.

   (a) $p(x) = x^2 + 2x - 3$;

   (b) $p(x) = x^2 + 1$;

   (c) $p(x) = 3x$;

   (d) $p(x) = 4x^2 + 2x$.

Soluţie. 1. Observăm că $L(x^2) = 2 \cdot x = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (1 - x)$, $L(x) = 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot (1 - x)$, iar $L(1) = 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot (1 - x)$. Aşadar $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) $L(p(x)) = A \cdot [p(x)]_E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$

(b) $L(p(x)) = A \cdot [p(x)]_E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$

Exerciţiu 4.6.11. Se dă aplicaţia liniară $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -x_2, x_1 + 2x_2)$.

1. Să se determine matricea aplicaţiei liniare L relativ la perechea de baze $(B_c^{\mathbf{R}^2}, B_c^{\mathbf{R}^3})$.
2. Să se determine matricea aplicaţiei liniare L relativ la perechea de baze (B, B') unde $B = \{\overline{u}_1(1, -1), \overline{u}_2(0, 2)\}$, respectiv

$$B' = \{\overline{v}_1(-1, 2, 0), \overline{v}_2(0, 1, -1), \overline{v}_3(1, 0, 2)\}.$$

Soluţie. 1. Observăm că $L(1, 0) = (1, 0, 1)$, iar $L(0, 1) = (1, -1, 2)$. Aşadar $A_L(B_c^{\mathbf{R}^2}, B_c^{\mathbf{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

2. Vom aplica următoarea formulă

$$A_L(B, B') = T^{-1}_{B_c^{\mathbf{R}^3} B'} \cdot A_L(B_c^{\mathbf{R}^2}, B_c^{\mathbf{R}^3}) \cdot T_{B_c^{\mathbf{R}^2} B}$$

unde am notat cu

$$Q = T_{B_c^{\mathbf{R}^3} B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

matricea de trecere de la baza canonică pentru $\mathbf{R}^3$ la B', iar cu

$$P = T_{B_c^{\mathbf{R}^2} B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

am notat matricea de trecere de la baza canonică pentru $\mathbf{R}^2$ la B. Efectuând calculele, obţinem

$$A_L(B, B') = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

5 Valori şi vectori proprii

Două matrici $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ se numesc **asemenea** dacă există $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ astfel încât $B = P^{-1}AP$.

Ne propunem să analizăm condiţiile în care o matrice A este asemenea cu o matrice diagonală $D = (d_{ij}), d_{ij} = 0, i \neq j$.

5.1 Polinom caracteristic şi valori proprii

Fie V un $F-$spaţiu vectorial finit dimensional. Fie $\alpha : V \to V$ un endomorfism.

Definiţie 5.1.1. Un vector $\overline{v} \in V$ se numeşte **vector propriu** a lui α dacă:

1. $\overline{v} \neq \overline{0}$;
2. $\alpha(\overline{v}) = f\overline{v}, f \in F$.

f se numeşte **valoarea proprie** corespunzătoare vectorului propriu $\overline{v}$.

Un scalar f se numeşte **valoare proprie** a lui α dacă există un vector propriu a lui α avându-l pe f ca valoare proprie corespunzătoare.

Fie $\mathcal{B}$ o bază pentru V şi fie $A = A_\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ matricea atribuită lui α. Noţiunile valoare şi vector propriu se definesc analog pentru matricea A şi vectorii săi coloană din F^n.

Definiţie 5.1.2. Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$. Vectorul coloană $\overline{s} \in F^n$ se numeşte **vector propriu** a lui A dacă:

1. $\overline{s} \neq \overline{0}$;
2. $A\overline{s} = f\overline{s}, f \in F$.

Scalarul f se numeşte **valoarea proprie** a lui A corespunzătoare vectorului propriu $\overline{s}$.

Fie $A = A_\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ matricea atribuită unui endomorfism α relativ la o bază $\mathcal{B}$. Vectorului $\overline{v} \in V$ îi corespunde relativ la baza $\mathcal{B}$ vectorul

coloană $\overline{s} \in F^n$. Observăm că ecuaţia $\alpha(\overline{v}) = f\overline{v}$ este echivalentă cu ecuaţia $A\overline{s} = f\overline{s}$. Aşadar $\overline{v}$ este vector propriu pentru α dacă şi numai dacă $\overline{s}$ este vector propriu pentru A. Însă vectorul $\overline{s}$ depinde, la fel ca şi matricea A, de alegerea bazei $\mathcal{B}$ iar la schimbarea bazei se va modifica. În schimb, valoarea proprie f nu depinde nici de α, nici de alegerea bazei $\mathcal{B}$ sau de matricea astfel obţinută.

Propoziţie 5.1.3. Matrici asemenea au aceleaşi valori proprii.

Demonstraţie. Matricile $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ sunt asemenea dacă şi numai dacă descriu relativ la anumite baze acelaşi endomorfism α. Aşadar, conform observaţiei de mai sus, valorile proprii ale lui A şi B coincid cu valorile proprii ale lui α. □

Observăm că ecuaţia $\alpha(\overline{v}) = f\overline{v}$ pentru valori şi vectori proprii este echivalentă cu $\overline{0} = (f \cdot id - \alpha)\overline{v}$, unde $f \cdot id - \alpha$ este un endomorfism a lui V.

Propoziţie 5.1.4. Scalarul f este valoare proprie pentru α respectiv pentru matricea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ dacă şi numai dacă $\mathrm{Ker}(\mathrm{f} \cdot \mathrm{id} - \alpha) \neq \{\overline{0}\}$ respectiv $\mathrm{Ker}(\mathrm{f} \cdot \mathrm{I_n} - \mathrm{A}) \neq \{\overline{0}\}$. Dacă f este o valoare proprie, atunci vectorii proprii corespunzători lui f sunt vectorii $\overline{0} \neq \overline{v} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{f} \cdot \mathrm{id} - \alpha)$ respectiv $\overline{s} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{f} \cdot \mathrm{I_n} - \mathrm{A})$.

Demonstraţie. f este valoare proprie pentru α dacă şi numai dacă există $\overline{0} \neq \overline{v}$ astfel încât $\overline{0} = f \cdot \overline{v} - \alpha(\overline{v}) = (f \cdot \mathrm{id} - \alpha)\overline{\mathrm{v}}$. Acest lucru este echivalent cu $\mathrm{Ker}(\mathrm{f} \cdot \mathrm{id} - \alpha) \neq \{\overline{0}\}$. Vectorii proprii corespunzători sunt vectorii $\overline{v} \neq \overline{0}$ din $\mathrm{Ker}(\mathrm{f} \cdot \mathrm{id} - \alpha)$. Ţinând cont de definiţia vectorului propriu al unei matrici, aceeaşi afirmaţie rămâne adevărată şi pentru matrici. □

Definiţie 5.1.5. Dacă f este o valoare proprie a endomorfismului α respectiv a matricii A, atunci subspaţiul diferit de vectorul nul $\mathrm{Ker}(\mathrm{f} \cdot \mathrm{id} - \alpha)$ respectiv $\mathrm{Ker}(\mathrm{f} \cdot \mathrm{I_n} - \mathrm{A})$ se numeşte **subspaţiul propriu** corespunzător valorii proprii f.

Fie $\mathcal{B}$ o bază pentru V. Fie $A = A_\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = (a_{ij})$ matricea atribuită endomorfismului $\alpha : V \to V$ relativ la baza $\mathcal{B}$. Conform Propoziţiei 4.2.11 şi Corolarului 4.4.5, condiţia de valoare proprie este echivalentă cu $\mathrm{rg}(\mathrm{f} \cdot \mathrm{id} - \alpha) < \mathrm{n}$ respectiv $\mathrm{rg}(\mathrm{f} \cdot \mathrm{I_v} - \mathrm{A}) < \mathrm{n}$. Această relaţie este

echivalentă cu $\det(f \cdot id - \alpha) = 0$ respectiv $\det(f \cdot I_n - A) = 0$. Din această ecuaţie vom calcula valorile proprii f.

Definiţie 5.1.6. Polinomul $P_A(X) = \det(X \cdot I_n - A)$ respectiv $P_\alpha(X) = \det(X \cdot id - \alpha)$ se numeşte **polinomul caracteristic** al matricii $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ respectiv al endomorfismului α al $F-$spaţiului vectorial V.

Propoziţie 5.1.7.

1. Fie $A = A_\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ matricea endomorfismului α relativ la baza $\mathcal{B}$ a lui V. Atunci $P_\alpha(X) = P_A(X)$.
2. Două matrici asemenea au acelaşi polinom caracteristic.

Demonstraţie.

1. Pentru fiecare scalar $f \in F$, $I_n \cdot f - A$ este matricea endomorfismului $id \cdot f - \alpha$ a lui V. Înlocuind pe f cu necunoscuta X, obţinem:

$$\det(id \cdot X - \alpha) = \det(I_n \cdot X - A).$$

   Deci $P_\alpha(X) = P_A(X)$.

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ două matrici asemenea. Atunci există o matrice inversabilă $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ astfel încât $B = Q^{-1}AQ$. Mai departe avem $P_B(X) = \det(X \cdot I_n - B) = \det(X \cdot Q^{-1}Q - Q^{-1}AQ) = \det Q^{-1} \cdot \det(X \cdot I_n - A) \cdot \det Q = \det(X \cdot I_n - A) = P_A(X)$.

□

Propoziţie 5.1.8. Polinomul caracteristic al unei matrici $A \in \mathcal{M}_{n\cdot n}(F)$ are forma $P_A(X) = X^n + q_{n-1}X^{n-1} + ... + q_1X + q_0$, cu coeficienţii corespunzători $q_0, ..., q_{n-1} \in F$, unde $q_0 = (-1)^n \det A$ şi $q_{n-1} = -\mathrm{tr}A$.

Propoziţie 5.1.9. $f \in F$ este valoare proprie a lui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ dacă şi numai dacă f este rădăcină a polinomului caracteristic $P_A(X)$ a lui A.

Demonstraţie. $f \in F$ este rădăcină a polinomului $P_A \Leftrightarrow 0 = P_A(f) = \det(f \cdot I_n - A) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f \cdot I_n - A) < n$ relaţie echivalentă, conform Propoziţiei 4.2.11, cu $\dim \mathrm{Ker}(f \cdot I_n - A) = n - \mathrm{rg}(f \cdot I_n - A) > 0$. Aşadar, conform Propoziţiei 5.1.4, $f \in F$ este rădăcină a polinomului P_A dacă şi numai dacă A are un vector propriu $\overline{v} \neq \overline{0}$ corespunzător valorii proprii f. □

Exemplu 5.1.10. Determinaţi valorile şi vectorii proprii ai matricii $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Obţinem $P_A(X) = (X-2)^2(X-6)$.

Subspaţiul propriu $\mathrm{Ker}(2\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})$ corespunzător valorii proprii $f_1 = 2$ este mulţimea soluţiilor sistemului omogen de ecuaţii având matricea coeficienţilor $2I_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Deoarece $\mathrm{rg}(2\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) = 1$, $\dim \mathrm{Ker}(2\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) = 3 - \dim \mathrm{Im}(2\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) = 3 - \mathrm{rg}(2\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) = 3 - 1 = 2$. Găsim $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(2\mathrm{I}_3-\mathrm{A})} = \{\overline{v}_1(1, 0, -1), \overline{v}_2(0, 1, -1)\}$ vectori proprii pentru $f_1 = 2$.

Pentru $f_2 = 6$, avem $\dim \mathrm{Ker}(6\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) = 3 - \mathrm{rg}(6\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) = 1$. Găsim $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(6\mathrm{I}_3-\mathrm{A})} = \{\overline{v}_3(1, 2, 1)\}$ vector propriu pentru $f_2 = 6$.

Observăm că, deoarece vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$ sunt liniar independenţi, ei formează o bază pentru $\mathbf{R}^3$.

$\star$ Dacă polinomul caracteristic al unei matrici A nu are rădăcini în F, atunci, conform Propoziţiei 5.1.9, A nu are vectori proprii în F^n.

Exemplu 5.1.11. Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \mathbf{R}$, atunci polinomul ca - racteristic $P_A(X) = X^2 + 1$ nu are rădăcini în $\mathbf{R}$.

Definiţie 5.1.12. Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$. Dacă toate valorile proprii $f_r, 1 \leq r \leq k$ ale lui A sunt conţinute în F, atunci, conform Propoziţiei 5.1.9,

$$P_A(X) = \pi_{r=1}^{k}(X - f_r)^{c_r}.$$

Numărul natural c_r se numeşte **ordinul de multiplicitate** al valorii proprii f_r a lui A.

Analog se defineşte ordinul de multiplicitate al valorii proprii f a unui endomorfism $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathrm{F}}\mathrm{V}$.

În Exemplul 5.1.10, valoarea proprie 2 avea ordinul de multiplicitate 2, iar acestei valori proprii îi corespundeau doi vectori proprii liniar independenţi. Această situaţie însă nu este permanentă.

Exemplu 5.1.13. Valoarea proprie ale matricii $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este $f_{1,2} = 1$. Observăm că această valoare proprie are ordinul de multiplicitate egal cu 2. Astfel $\mathrm{rg}(1 \cdot \mathrm{I}_2 - \mathrm{A}) = 1$. Deoarece $\dim \mathrm{Ker}(1 \cdot \mathrm{I}_2 - \mathrm{A}) = 2 - \mathrm{rg}(1 \cdot \mathrm{I}_2 - \mathrm{A}) = 1$, valorii proprii $f_{1,2} = 1$ îi corespunde un singur vector propriu.

Propoziţie 5.1.14. Fie f o valoare proprie a lui $\alpha \in \mathrm{End_F V}$ cu ordinul de multiplicitate c. Atunci $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{f} \cdot \mathrm{id} - \alpha) \leq \mathrm{c}$.

Demonstraţie. Fie $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_r\}$ o bază a subspaţiului propriu corespunzător valorii proprii f. Completăm această bază la o bază $\mathbf{B} = \{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_r, ..., \overline{v}_n\}$ a spaţiului vectorial V. Deoarece $\alpha(\overline{v}_i) = f\overline{v}_i, i = \overline{1, r}$, α are relativ la baza $\mathbf{B}$ matricea $A = A_\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} F & C \\ 0_n & D \end{pmatrix}$, unde $F = \begin{pmatrix} f & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & f \end{pmatrix}$, iar C şi D sunt matrici. Aşadar f este o valoare proprie a lui α având ordinul de multiplicitate cel puţin egal cu r. □

Propoziţie 5.1.15.

1. Fie $A \in \mathcal{M}_{n \cdot n}(F), A = (a_{ij})$. A este asemenea cu o matrice superior triunghiulară $B = (b_{ij})$ dacă şi numai dacă polinomul ei caracteristic poate fi descompus în factori liniari, i.e. $P_A(X) = \pi_{r=1}^k (X - f_r)^{c_r}, c_1 + ... + c_k = n$.

2. Dacă echivalenţa de la punctul 1. este adevărată, atunci elementele de pe diagonala principală a matricii B sunt valorile proprii f_r ale lui A având respectiv ordinul de multiplicitate c_r.

5.2 Descompunerea matricilor

Fie V un $F-$spaţiu vectorial finit dimensional. Vom caracteriza în continuare acele endomorfisme $\alpha \in \mathrm{End_F V}$ pentru care există o bază pentru V formată din vectorii proprii a lui α.

Propoziţie 5.2.1. Vectorii proprii ce corespund la valori proprii distincte ai unui endomorfism α a lui V sunt liniar independenţi.

Demonstraţie. Fie $f_1, ..., f_k$ valorile proprii distincte ale lui α, $k \leq n = \dim_F V$. Pentru $i = \overline{1, k}$, fie $\overline{v}_i$ vectorul propriu a lui α corespunzător valorii proprii f_i. Atunci avem:

$$(f_i \cdot \mathrm{id} - \alpha)\overline{\mathrm{v}}_\mathrm{j} = \mathrm{f_i}\overline{\mathrm{v}}_\mathrm{j} - \alpha(\overline{\mathrm{v}}_\mathrm{j}) = \mathrm{f_i}\overline{\mathrm{v}}_\mathrm{j} - \mathrm{f_j}\overline{\mathrm{v}}_\mathrm{j} = \begin{cases} 0 & \textit{dacă}\, j = i, \\ (f_i - f_j)\overline{v}_j & \textit{dacă}\, j \neq i. \end{cases}$$

Presupunem că vectorii $\overline{v}_1, ..., \overline{v}_k$ sunt liniar dependenţi. Atunci există $c_i \in F$, nu toţi egal cu 0 astfel încât

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \overline{v}_i = \overline{0}. \tag{1}$$

Fie $c_1 \neq 0$. Din (1) obţinem

$$\overline{0} = [\pi_{i=2}^{k}(f_i \cdot \mathrm{id} - \alpha)] \sum_{i=1}^{k} c_i \overline{v}_i = (f_2 - f_1) \cdot ... \cdot (f_k - f_1) c_1 \overline{v}_1 \neq \overline{0}.$$

Deoarece am ajuns la o contradicţie, rezultă că vectorii $\overline{v}_1, ..., \overline{v}_k$ sunt liniar independenţi.

□

Propoziţia de mai sus poate fi reformulată pentru matrici.

Corolar 5.2.2. Dacă polinomul caracteristic al endomorfismului $\alpha : V \to V$ are exact $n = \dim V$ rădăcini distincte, atunci V are o bază formată din vectorii proprii a lui α.

Demonstraţie. Fie $\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n$ vectorii proprii corespunzători valorilor proprii distincte $f_1, ..., f_n$. Deoarece conform propoziţiei anterioare, vectorii $\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n$ sunt liniar independenţi, ei formează, conform Corolarului 3.2.13, o bază pentru V. □

Definiţie 5.2.3. 1. O matrice pătratică $D = (d_{ij})$ se numeşte **matrice diagonală** dacă $d_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

2. O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ se numeşte **diagonalizabilă** dacă este asemenea cu o matrice diagonală $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$.

3. Un endomorfism $\alpha : V \to V$ se numeşte **diagonalizabil** dacă V are o bază formată din vectorii proprii a lui α.

Dacă $D = \begin{pmatrix} f_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & f_n \end{pmatrix}$ este o matrice diagonală, atunci

$$P_D(X) = (X - f_1) \cdot ... \cdot (X - f_n),$$

i.e. elementele de pe diagonala principală $f_i, i = \overline{1, n}$, sunt valorile proprii ale lui D.

Propoziţie 5.2.4. Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$, fie $f_1,...,f_n$ valorile proprii ale lui A şi fie $d_i = \dim \mathrm{Ker}[\mathrm{f_i I_n - A}]$ dimensiunea subspaţiului propriu corespunzător valorii proprii f_i. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. există o bază în F^n formată din vectorii proprii ai lui A;

2. A este diagonalizabilă;

3. $\sum_{i=1}^{s} d_i = n, i = \overline{1,n}$.

Demonstraţie. $1 \Rightarrow 2$ Fie $\mathcal{B} = \{\overline{v}_1,...,\overline{v}_n\}$ o bază pentru F^n formată din vectorii proprii corespunzători valorilor proprii f_i. Atunci $Av_i = f_i\overline{v}_i$. Matricea $A_\alpha(\mathcal{B},\mathcal{B})$ aplicaţiei liniare $\alpha : \overline{v} \to A\overline{v}$ de la F^n la F^n relativ la această bază este matricea diagonală $D = \begin{pmatrix} f_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & f_n \end{pmatrix}$. Fie P matricea schimbării de bază de la $\{\overline{e}_1,...,\overline{e}_n\}$ la $\{\overline{v}_1,...,\overline{v}_n\}$. Atunci, conform Propoziţiei 4.3.5, avem $D = P^{-1}AP$. Aşadar A este diagonalizabilă.

$2 \Rightarrow 3$ Fie $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} f_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & f_n \end{pmatrix}$ o matrice diagonală. Fie s este numărul de valori proprii distincte ale lui A.

Conform Propoziţiei 5.1.9, elementele f_r de pe diagonala principală a matricii D sunt valorile proprii ale lui A, $r = \overline{1,s}$. Fie c_r ordinul de multiplicitate al valorii proprii $f_r, r = \overline{1,s}$. Atunci $n = \sum_{r=1}^{s} c_r$. Conform Propoziţiei 5.1.9, $P_A(X) = P_D(X) = \pi_{r=1}^{s}(X - f_r)^{s_r}$.

Matricea $f_r \cdot I_n - D$ are c_r zerouri pe diagonala principală. Astfel $n - c_r = \mathrm{rg(f_r \cdot I_n - D) = rg(f_r \cdot P^{-1}P - P^{-1}AP) = rg[P^{-1}(f_r \cdot I_n - A)P]} =$ (conform Propoziţiei 4.5.5) $\mathrm{rg(f_r \cdot I_n - A)}$ = (conform Propoziţiei 4.2.7) $\dim \mathrm{Im(f_r \cdot I_n - A)}$ = (conform Propoziţiei 4.2.11) $= n - \mathrm{Ker(f_r \cdot I_n - A)} = \mathrm{n - d_r}$. Aşadar $d_r = c_r$ şi $\sum_{r=1}^{s} d_r = \sum_{r=1}^{s} c_r = n$.

$3 \Rightarrow 1$ Fie U_i subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii f_i a lui A. Conform Propoziţiei 5.2.1 şi a Propoziţiei 3.3.3, suma $\sum_{i=1}^{s}$ este directă, unde $U_i \leq V = F^n$. Atunci, conform 3., $\dim V = n = \sum_{i=1}^{s} d_i = \sum_{i=1}^{s} \dim U_i = \dim(\oplus_{i=1}^{s} U_i)$. Astfel, conform Corolarului 3.2.13,

$$V = \oplus_{i=1}^{s} U_i. \tag{2}$$

Aşadar, conform Propoziţiei 3.2.10, $\forall i = \overline{1,s}, U_i$ are o bază $\mathcal{B}_i$ cu d_i elemente $\overline{b}_{ij}, j = \overline{1,d_i}$.

Pe de altă parte, deoarece $U_i = \mathrm{Ker}(\mathrm{f_i} \cdot \mathrm{I_n} - \mathrm{A})$, $\forall \overline{b}_{ij}$ este un vector propriu a lui A corespunzător valorii proprii f_i. Aşadar, din relaţia (2), $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \bigcup ... \bigcup \mathcal{B}_n = \{\overline{b}_{ij} \mid i = \overline{1,s}, 1 \leq j_i \leq d_i\}$ este o bază pentru V formată din vectorii proprii ai lui A. □

Exemplu 5.2.5. 1. Stabiliţi dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este diagonalizabilă.

Deoarece $P_A(X) = (X-1)^2$, $f_{1,2} = 1$ este valoare proprie a lui A având ordinul de multiplicitate 2.

Deoarece $\mathrm{rg}(\mathrm{I_2} - \mathrm{A}) = \dim \mathrm{Im}(\mathrm{I_2} - \mathrm{A}) = 1$, avem

$$d_1 = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{I_2} - \mathrm{A}) = 2 - 1 < 2 = \mathrm{n}.$$

Aşadar, conform Propoziţiei 5.2.4, A nu este diagonalizabilă.

2. Stabiliţi dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ este diagonalizabilă. Conform Exemplului 5.1.10, $f_1 = 2$ având ordinul de multiplicitate 2 şi $f_2 = 6$ având ordinul de multiplicitate 1, sunt valorile proprii ale lui A. Obţinem $d_1 = 2$ şi $d_2 = 1$. Deoarece $d_1 + d_2 = n$, matricea A este diagonalizabilă.

Propoziţie 5.2.6. (Metoda de calcul a matricii de transformare P a unei matrici diagonalizabile $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$) Conform Propoziţiei 5.2.4, matricea $A = (a_{ij})$ este diagonalizabilă dacă şi numai dacă spaţiul vectorial $V = F^n$ are o bază formată din vectorii proprii a lui A. Aşadar toate valorile proprii f_i ale lui A sunt din F. Astfel, pot fi parcurse următoarele etape:

1. calculăm coeficienţii polinomului caracteristic a lui A;

2. calculăm zerourile f_i ale polinomului caracteristic $P_A(X) = \pi_{j=1}^{k}(X - f_j)^{d_j}$ unde valorile proprii $f_j \in F, j = \overline{1,k}$ sunt distincte şi $n = \sum_{j=1}^{k} d_j$;

3. pentru fiecare valoare proprie f_j a lui A, calculăm o bază $\{\overline{s}_{t+1}, ..., \overline{s}_{t+d_j}\}$ a subspaţiului său propriu $W_j = \mathrm{Ker}(\mathrm{f_j} \cdot \mathrm{I_n} - \mathrm{A})$ unde $t = \sum_{i=1}^{j-1} d_i$;

4. aşadar $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \bigcup ... \bigcup \mathcal{B}_k$ este o bază pentru V; fie $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$, $P = [\overline{s}_1|...|\overline{s}_k]$ unde $\overline{s}_r, r = \overline{1,k}$ sunt vectorii din $\mathcal{B}$ în ordinea stabilită la punctul 3.; atunci $D = P^{-1}AP$ este o matrice diagonală.

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că D este o matrice diagonală.

Deoarece $\dim W_j = d_j$ şi $n = \sum_{j=1}^{k} d_j$, baza $\mathcal{B}$ din V este formată, conform Propoziţiei 5.2.4, din vectorii proprii $\overline{s}_r$ a lui A din V. Conform construcţiei matricii P, vectorii proprii $\overline{s}_r$ sunt vectorii coloană a lui P. Aşadar, conform Propoziţiei 4.3.5, $D = P^{-1}AP$ este o matrice diagonală.
□

Exemplu 5.2.7. Găsiţi o matrice diagonală asemenea cu matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ peste **C**. Calculăm valorile proprii ale lui A şi obţinem $f_{1,2} = 2$, $f_3 = i$ şi $f_4 = -i$.

Pentru $f_{1,2} = 2$ avem

$$\dim \mathrm{Ker}(2\mathrm{I}_4 - \mathrm{A}) = \mathrm{n} - \dim \mathrm{Im}(2\mathrm{I}_4 - \mathrm{A}) = \mathrm{n} - \mathrm{rg}(2\mathrm{I}_4 - \mathrm{A}) = 4 - 2 = 2.$$

O bază pentru $\mathrm{Ker}(2\mathrm{I}_4 - \mathrm{A})$ este

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(2\mathrm{I}_4-\mathrm{A})} = \{\overline{v}_1(2, 1, 0, 0), \overline{v}_2(1, 0, 0, 1)\}.$$

Analog, pentru $f_3 = i$ avem

$$\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{iI}_4 - \mathrm{A}) = 4 - \mathrm{rg}(\mathrm{iI}_4 - \mathrm{A}) = 4 - 3 = 1.$$

O bază pentru $\mathrm{Ker}(\mathrm{iI}_4 - \mathrm{A})$ este

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathrm{iI}_4-\mathrm{A})} = \{\overline{v}_3(0, 0, i, 1)\}.$$

Analog, pentru $f_4 = -i$ obţinem

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(-\mathrm{iI}_4-\mathrm{A})} = \{\overline{v}_4(0, 0, i, -1)\}.$$

Aşadar $P = [\overline{v}_1|\overline{v}_2|\overline{v}_3|\overline{v}_4]$, iar $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$.

5.3 Exerciţii

Exerciţiu 5.3.1. Să se arate că matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ este diagonalizabilă. Calculaţi matricea P pentru care $D = P^{-1}AP$, D fiind o matrice diagonală ce este asemenea cu A.

Soluţie. Din ecuaţia caracteristică $\begin{vmatrix} f & 0 & -1 \\ -1 & f & 0 \\ 0 & -1 & f \end{vmatrix} = 0$ obţinem valorile proprii $f_1 = 1, f_{2,3} = \frac{-1 \pm i \cdot \sqrt{3}}{2}$ ale matricii A.

Notăm cu $d_i = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{f_i} \cdot \mathrm{I_3} - \mathrm{A}), i \in \{1, 2, 3\}$. Observăm că $\mathrm{rang}(\mathrm{I_3} - \mathrm{A}) = 2$ şi deci $d_1 = 3 - 2 = 1$. De asemenea, observăm că $\mathrm{rang}(\mathrm{f_i} \cdot \mathrm{I_3} - \mathrm{A}) = 2$ şi deci $d_i = 1, i \in \{2, 3\}$. Aşadar, deoarece $d_1 + d_2 + d_3 = 3 = n$, matricea A este diagonalizabilă.

Căutăm în continuare vectorul propriu corespunzător valorii proprii $f_1 = 1$. În acest scop, calculăm o bază pentru

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{I_3} - \mathrm{A}) = \{(\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \mathrm{x_3}) \mid \\ x_1 - x_3 = 0, -x_1 + x_2 = 0, -x_2 + x_3 = 0\} = \{\alpha(1, 1, 1) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Aşadar o bază pentru $\mathrm{Ker}(\mathrm{I_3} - \mathrm{A})$ este $\{\overline{v}_1 = \{(1, 1, 1)\}\}$.

Căutăm în continuare vectorul propriu al matricii A corespunzător valorii proprii $f_1 = 1$. În acest scop, calculăm o bază pentru

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{I_3} - \mathrm{A}) = \{(\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \mathrm{x_3}) \mid x_1 - x_3 = 0, -x_1 + x_2 = 0, -x_2 + x_3 = 0\} = \\ = \{\alpha(1, 1, 1) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Aşadar o bază pentru $\mathrm{Ker}(\mathrm{I_3} - \mathrm{A})$ este $\{\overline{v}_1 = (1, 1, 1)\}$. Vectorul $\overline{v}_1 = \{(1, 1, 1)\}$ este vectorul propriu al matricii corespunzător valorii proprii $f_1 = 1$.

Căutăm în continuare vectorul propriu al matricii A corespunzător valorii proprii $f_i = \frac{-1 \pm i \cdot \sqrt{3}}{2}, i \in \{2, 3\}$. În acest scop, calculăm o bază pentru

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{f_i} \cdot \mathrm{I_3} - \mathrm{A}) = \{(\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \mathrm{x_3}) \mid f_i \cdot x_1 - x_3 = 0, -x_1 + f_i \cdot x_2 = 0, \\ -x_2 + f_i \cdot x_3 = 0\} = \{\alpha(f_i, 1, f_i^2) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Aşadar o bază pentru $\mathrm{Ker}(\mathrm{f_i} \cdot \mathrm{I_3} - \mathrm{A})$ este $\{\overline{v}_i = (f_i, 1, f_i^2)\}$. Vectorul $\overline{v}_i = \{(f_i, 1, f_i^2)$ este vectorul propriu al matricii corespunzător valorii proprii $f_i, i = \{2, 3\}$.

Deoarece matricea A este diagonalizabilă, pentru $P = \begin{pmatrix} 1 & f_2 & f_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & f_2^2 & f_3^2 \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{pmatrix}$, avem relaţia $D = P^{-1}AP$.

Exerciţiu 5.3.2. Verificaţi dacă matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ este diagonalizabilă.

Soluţie. Din ecuaţia caracteristică

$$\begin{vmatrix} f - 1 & 0 & 0 \\ -1 & f - 1 & 0 \\ 0 & -1 & f - 1 \end{vmatrix} = 0$$

obţinem valoarea proprie $f_i = 1, i \in \{1, 2, 3\}$ a matricii B. Observăm că această valoare proprie are ordinul de multiplicitate 3.

Căutăm în continuare vectorul propriu al matricii B corespunzător valorii proprii $f_1 = 1$. În acest scop, căutăm o bază pentru

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{I_3} - \mathrm{B}] = \{(\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \mathrm{x_3}) | - \mathrm{x_1} = 0, -\mathrm{x_2} = 0\} = \{\alpha \cdot (0, 0, 1) | \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Aşadar $\overline{v}(0, 0, 1)$ este vectorul propriu al matricii B corespunzător valorii proprii $f_1 = 1$.

Notăm cu $d_i = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{I_3} - \mathrm{A}), i \in \{1, 2, 3\}$. Observăm că $\mathrm{rang}(\mathrm{I_3} - \mathrm{A}) = 2$ şi deci $d_1 = 3 - 2 = 1$. Deoarece $d_1 < n = 3$, matricea B nu este diagonalizabilă.

Exerciţiu 5.3.3. Verificaţi dacă următoarele matrici sunt diagonalizabile $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 2 \\ 4 & 9 & -2 \\ 8 & 12 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. În caz afirmativ, găsiţi matricile D şi P pentru care $D = P^{-1}MP$, $M \in \{A, B, C\}$.

Exerciţiu 5.3.4. Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ şi fie c o valoare proprie a lui A având ordinul de multiplicitate k. Arătaţi că $\mathrm{rang(c \cdot I_n - A) \geq n - k}$.

Soluţie. Deoarece c este valoare proprie pentru A, $\mathrm{det(c \cdot I_n - A) = 0}$. Aşadar $\mathrm{rang(c \cdot I_n - A) < n}$. Fie $\mathrm{rang(c \cdot I_n - A) = n - r, r > 0}$. Astfel $\dim \mathrm{Ker(c \cdot I_n - A) = r}$. Aceasta înseamnă că matricea A are r vectori proprii liniar independenţi care formează o bază pentru $\mathrm{Ker(c \cdot I_n - A)}$. Această bază poate fi extinsă la o bază pentru $\mathbf{R^n}$. Aşadar

$$P_A(X) = (c - X)^r \cdot g(X).$$

Deoarece c are ordinul de multiplicitate k, rezultă că $r \leq k$. Astfel $n - r \geq n - k$ şi deci $\mathrm{rang(c \cdot I_n - A) \geq n - k}$.

Exerciţiu 5.3.5. Arătaţi că matricea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ este inversabilă dacă şi numai dacă 0 nu este valoare proprie a lui A.

Soluţie. Fie $\alpha : V \to V$ un endomorfism corespunzător matricii A, V fiind un $\mathbf{R}-$spaţiu vectorial de dimensiune n.

Matricea A este singulară dacă şi numai dacă $\mathrm{detA} = 0$. Aşadar dacă şi numai dacă $\mathrm{det(0 \cdot I_n - A) = 0}$. Deci A este singulară dacă şi numai dacă există un vector $\overline{x} \neq \overline{0}$ astfel încât $\alpha(\overline{x}) = \overline{0} = 0 \cdot \overline{x}$. Aşadar dacă şi numai dacă 0 este valoare proprie a lui α şi deci valoare proprie a lui A.

Exerciţiu 5.3.6. Arătaţi printr-un exemplu că ordinul de multiplicitate a valorii proprii c^r pentru matricea A^r este mai mare decât ordinul de multiplicitate a valorii proprii c pentru matricea A.

Soluţie. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Această matrice are ca valori proprii $f_1 = 1$ având ordinul de multiplicitate 1 şi $f_1 = -1$ având ordinul de multiplicitate 1.

Observăm că $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Matricea A^2 are ca valoare proprie

$f'_{1,2} = 1$ având ordinul de multiplicitate 2 acesta fiind aşadar mai mare decât ordinul de multiplicitate al valorii proprii $f_1 = 1$ a matricii A.

Exerciţiu 5.3.7. Să se determine valorile proprii ale matricii $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ cunoscându-i vectorii proprii $\overline{v}_1(1,1,1), \overline{v}_2(1,0,-1), \overline{v}_3(1,-1,0)$.

Soluţie. Fie $D = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{pmatrix}$ şi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Din relaţia $D = P^{-1}AP$, rezultă un sistem cu 3 ecuaţii şi trei necunoscute (f_1, f_2, f_3).

Exerciţiu 5.3.8. Găsiţi valorile proprii nenule şi vectorii proprii corespunzători ai endomorfismului $\alpha : C[0, 2\pi] \to C[0, 2\pi]$,

$$\alpha(f)(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{sin(x + y) \cdot f(y)dy}.$$

Soluţie. Observăm că

$$\alpha(f)(x) = \sin x \cdot \int_0^{2\pi} \cos y \cdot f(y)dy + \cos x \cdot \int_0^{2\pi} \sin y \cdot f(y)dy.$$

Deci Im$\alpha \subset <\mathrm{sin\,x, cos\,x}>= \mathrm{V, x} \in [0, 2\pi]$. Pentru valori proprii nenule, vectorii proprii sunt în Imα şi deci putem să analizăm $\overline{\alpha} : V \to V$.

În continuare, obţinem:

$$\alpha(\sin)(x) = \sin x \cdot \int_0^{2\pi} \cos y \cdot \sin y dy + \cos x \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 y dy =$$
$$= \frac{\cos x}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2y)dy = \pi \cdot \cos x.$$

Analog obţinem

$$\alpha(\cos)(x) = \pi \cdot \cos x.$$

Observăm că $B = \{\sin x, \cos x\}$ este o bază pentru spaţiul vectorial

$$V =< \sin x, \cos x >.$$

Matricea asociată endomorfismului $\overline{\alpha} : V \to V$ este $A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$.

Valorile proprii ale matricii A sunt $f_{1,2} = \pm\pi$. Pentru a găsi vectorul propriu corespunzător valorii proprii $f_1 = \pi$, căutăm o bază pentru

$$\text{Ker}(\pi \cdot \text{I}_2 - \text{A}) = \{(\text{x}_1, \text{x}_2) | \pi\text{x}_1 - \pi\text{x}_2 = 0, -\pi\text{x}_1 + \pi\text{x}_2 = 0\} =$$
$$= \{\alpha(1,1) | \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Deci vectorul propriu corespunzător valorii proprii $f_1 = \pi$ este $\overline{v}_1(1,1)$. Analog găsim vectorul propriu corespunzător valorii proprii $f_2 = -\pi$. Acesta este $\overline{v}_2(1,-1)$.

Exerciţiu 5.3.9. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii pentru endomorfismul $\alpha : C[a,b] \to C[a,b], \alpha(g)(x) = x \cdot g(x)$.

6 Spaţii vectoriale euclidiene

6.1 Produse scalare

Fie V un $\mathbf{R}-$spaţiu vectorial. Definim pe V **forma biliniară** $\beta : V \to V$ astfel încât următoarele proprietăţi de liniaritate să fie îndeplinite:

1. $\beta(\overline{x}_1 + \overline{x}_2, \overline{y}) = \beta(\overline{x}_1, \overline{y}) + \beta(\overline{x}_2, \overline{y})$;
2. $\beta(\overline{x}, \overline{y}_1 + \overline{y}_2) = \beta(\overline{x}, \overline{y}_1) + \beta(\overline{x}, \overline{y}_2)$;
3. $\beta(c\overline{x}, \overline{y}) = c\beta(\overline{x}, \overline{y}) = \beta(\overline{x}, c\overline{y})$,

$\forall \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}, \overline{y}_1, \overline{y}_2 \in V, \forall c \in \mathbf{R}$.

Definiţie 6.1.1. Forma biliniară $\beta : V \to V$ se numeşte **produs scalar** pe V dacă sunt îndeplinite următoarele proprietăţi:

1. $\beta(\overline{x}, \overline{y}) = \beta(\overline{y}, \overline{x}), \forall \overline{x}, \overline{y} \in V$;
2. $\beta(\overline{x}, \overline{x}) > 0, \forall 0 \neq \overline{x}$.

Notaţie: $\overline{x} \cdot \overline{y}$ sau $< \overline{x}, \overline{y} >$.

Exemplu 6.1.2.

1. În spaţiul vectorial $\mathbf{R}^n$ fixăm baza $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n\}$. Vectorii $\overline{x}, \overline{y} \in V$ au relativ la această bază coordonatele $\overline{x} = (x_1, ..., x_n), \overline{y} = (y_1, ..., y_n)$. Definim produsul scalar al vectorilor $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ prin $\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.
2. Forma biliniară $\beta : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $\beta(\overline{x}, \overline{y}) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ este un produs scalar.
3. Considerăm spaţiul vectorial $V = \{f \mid f : [a, b] \to \mathbf{R} \text{ continuă}\}$. Fie $h \in V, h(t) > 0, a \leq t \leq b$. Pentru $f, g \in V$, definim pe V produsul scalar $\beta(f, g) = \int_a^b h(t)f(t)g(t)dt$.
4. Considerăm spaţiul vectorial

$$V = \{f \mid f : [a, b] \to \mathbf{R} \text{ integrabilă}\}.$$

Forma biliniară $\beta(f,g) = \int_a^b h(t)f(t)g(t)dt, f,g \in V$ nu este produs scalar pe V. După cum reiese din exemplul următor, β nu este definită pozitiv. Fie $a = 0, b = 1, h(t) = 1, 0 \leq t \leq 1, f(t) = \begin{cases} 1 & dacă t = 0, \\ 0 & dacă t > 0. \end{cases}$ Atunci $\beta(f,f) = \int_0^1 f(t)f(t) = 0$ deşi $f \neq 0$ în V.

Definiţie 6.1.3. Un spaţiu vectorial real înzestrat cu un produs scalar se numeşte **spaţiu vectorial euclidean**.

Într-un spaţiu vectorial euclidean produsul scalar e caracterizat prin următoarele proprietăţi:

1. $(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)\overline{y} = \overline{x}_1\overline{y} + \overline{x}_2\overline{y}$;
2. $(c\overline{x})\overline{y} = c(\overline{xy})$;
3. $\overline{xy} = \overline{yx}$;
4. $\overline{xx} > 0, \overline{x} \neq 0$.

6.2 Normă şi ortogonalitate

Fie V un spaţiu vectorial euclidean.

Propoziţie 6.2.1. (Inegalitatea lui Schwarz) Pentru oricare $\overline{x}, \overline{y} \in V$ are loc următoarea inegalitate:

$$|\overline{x} \cdot \overline{y}|^2 \leq (\overline{x} \cdot \overline{x})(\overline{y} \cdot \overline{y}).$$

Are loc egalitate dacă şi numai dacă vectorii $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ sunt liniar dependenţi.

Demonstraţie. Dacă $\overline{y} = 0$, avem egalitate.

Dacă $\overline{y} \neq 0$, atunci $\overline{y} \cdot \overline{y} > 0$. Fie $c = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{y} \cdot \overline{y}}$. Deoarece

$$0 \leq (\overline{x} - c\overline{y})(\overline{x} - c\overline{y}) = \overline{x} \cdot \overline{x} - 2\frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{y} \cdot \overline{y}}\overline{x} \cdot \overline{y} + \frac{(\overline{x} \cdot \overline{y})^2}{(\overline{y} \cdot \overline{y})^2}\overline{y} \cdot \overline{y},$$

avem

$$0 \leq (\overline{x} \cdot \overline{x})(\overline{y} \cdot \overline{y}) - (\overline{x} \cdot \overline{y})^2 = (\overline{x} \cdot \overline{x})(\overline{y} \cdot \overline{y}) - |\overline{x} \cdot \overline{y}|^2.$$

Aşadar

$$|\overline{x}\cdot\overline{y}|^2 \leq (\overline{x}\cdot\overline{x})(\overline{y}\cdot\overline{y}).$$

Dacă $|\overline{x}\cdot\overline{y}|^2 = (\overline{x}\cdot\overline{x})(\overline{y}\cdot\overline{y})$, atunci $c^2|\overline{y}\cdot\overline{y}|^2 = (\overline{x}\cdot\overline{x})(\overline{y}\cdot\overline{y})$. Astfel $c\overline{y} = \overline{x}$ şi deci vectorii $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ sunt liniar dependenţi. □

Definiţie 6.2.2. Definim **norma** (**lungimea**) unui vector $\overline{x} \in V$ ca fiind $|\overline{x}| = \sqrt{\overline{x}\cdot\overline{x}}$.

Propoziţie 6.2.3. Pentru oricare $\overline{x}, \overline{y} \in V$ şi oricare $c \in \mathbf{R}$ avem:

1. $|\overline{x}| \geq 0$;
2. $|\overline{x}| = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = 0$;
3. $|c\cdot\overline{x}| = |c|\cdot|\overline{x}|$;
4. $|\overline{x}+\overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$.

Demonstraţie. 1. Rezultă din definiţia normei;

2. $|\overline{x}| = 0$;
3. $|c\overline{x}| = \sqrt{(c\overline{x})\cdot(c\overline{x})} = \sqrt{c\cdot c}\cdot\sqrt{\overline{x}\cdot\overline{x}} = |c|\cdot|\overline{x}|$;
4. $|\overline{x}+\overline{y}|^2 = (\overline{x}+\overline{y})(\overline{x}+\overline{y}) = |\overline{x}|^2 + 2\overline{x}\cdot\overline{y} + |\overline{y}|^2 \leq |\overline{x}|^2 + 2|\overline{x}|\cdot|\overline{y}| + |\overline{y}|^2 = (|\overline{x}| + |\overline{y}|)^2$. Astfel $|\overline{x}+\overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$.

□

Propoziţie 6.2.4. Pentru oricare $\overline{x}, \overline{y} \in V$, $|\overline{x}+\overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$ dacă şi numai dacă $\overline{y} = 0$ sau $\overline{x} = c\overline{y}, c \in \mathbf{R}_+$.

Definiţie 6.2.5. Un vector $\overline{x} \in V$ se numeşte **normat** dacă $|\overline{x}| = 1$.

★ $\forall\overline{0} \neq \overline{x} \in V, \frac{\overline{x}}{|\overline{x}|}$ este un vector normat.

Definiţie 6.2.6. $\forall\overline{0} \neq \overline{x}, \overline{y} \in V, \cos\angle(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{\overline{x}\cdot\overline{y}}{|\overline{x}|\cdot|\overline{y}|}$.

Deoarece, conform Propoziţiei 6.2.1, $\forall\overline{x}, \overline{y} \in V, |\overline{x}\cdot\overline{y}| \leq |\overline{x}|\cdot|\overline{y}|$, rezultă că $-1 \leq \cos\angle(\overline{x}, \overline{y}) \leq 1$. Aşadar în definiţia anterioară s-a definit într-ade-văr cosinusul unui unghi.

Definiţie 6.2.7. Doi vectori $\overline{x}, \overline{y} \in V$ se numesc **ortogonali** dacă $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0$. O submulţime $\emptyset \neq M \subset V$ se numeşte **sistem ortogonal** dacă $0 \notin M$ şi oricare doi vectori distincţi din M sunt ortogonali.

Un **sistem ortonormat** este un sistem ortogonal format din vectori normaţi. O **bază ortomormată** pentru V este un sistem ortonormat care este o bază pentru V.

Propoziţie 6.2.8. Fiecare sistem ortogonal M este liniar independent.

Demonstraţie. Fie $\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n \in M$ distincţi care îndeplinesc condiţia $c_1\overline{v}_1 + ... + c_n\overline{v}_n = \overline{0}$. Atunci pentru fiecare $k = \overline{1,n}$, $c_1(\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_k) + ... + c_n(\overline{v}_n \cdot \overline{v}_k) = 0$. Astfel, deoarece $\overline{v}_i\overline{v}_k = 0, i \neq k$, rezultă că $c_k(\overline{v}_k\overline{v}_k) = 0$. Cum $\overline{v}_k \neq \overline{0}$, de aici rezultă că $c_k = 0, k = \overline{1,n}$ şi deci vectorii $\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n$ sunt liniar independenţi. □

Propoziţie 6.2.9. Fie $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ o bază ortonormată pentru V. Fie $x_1, ..., x_n$ şi $y_1, ..., y_n$ coordonatele vectorilor $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ relativ la aceasta bază. Atunci $\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ şi $x_i = \overline{x} \cdot \overline{e}_i, i = \overline{1,n}$.

⋆ Fiecare bază $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n\}$ a unui spaţiu vectorial euclidean V poate fi privită drept o bază ortonormată pentru V relativ la un nou produs scalar $\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + ... + x_ny_n$, unde $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_iv_i$ şi $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_iv_i$.

⋆ Pentru $\mathbf{R}^n$ vom alege baza canonică drept bază ortonormată.

Exemplu 6.2.10. Fie $x(x_1, x_2), y(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$. Definim produsul scalar $\overline{x} \cdot \overline{y} = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$. Observăm că $\mathcal{B} = \{\overline{e}'_1(\frac{1}{2}, 0), \overline{e}'_2(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$. este o bază ortonormată pentru $\mathbf{R}^2$. Fie $\mathcal{B}_c = \{\overline{e}_1(1,0), \overline{e}_2(0,1)\}$ baza canonică din $\mathbf{R}^2$. Astfel avem $\overline{e}'_1 = \frac{1}{2}\overline{e}_1$ şi $\overline{e}'_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_2$.

Aşadar $\overline{x} = x'_1\overline{e}'_1 + x'_2\overline{e}'_2 = (\frac{1}{2}x'_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}x'_2)\overline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 \cdot \overline{e}_2$. Deoarece $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2$, obţinem $x_1 = \frac{1}{2}x'_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}x'_2$ şi $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2$. Analog avem $y_1 = \frac{1}{2}y'_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}y'_2$ şi $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y'_2$.

Efectuând calculele rezultă că $\overline{x} \cdot \overline{y} = x'_1y'_1 + x'_2y'_2$.

6.3 Metoda Gramm-Schmidt de ortonormare a unei baze

Metoda Gramm-Schmidt este un algoritm de construcţie recursivă a unei baze ortonormate $\mathcal{B}' = \{\overline{q}_1, ..., \overline{q}_n\}$ într-un spaţiu vectorial real euclidean V, pornind de la o bază oarecare $\mathcal{B} = \{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n\}$.

Etapa 1**:** Se defineşte vectorul $\overline{q}_1 = \frac{\overline{v}_1}{|\overline{v}_1|}$.

Etapa 2**:** Se construieşte un vector $\overline{0}_2 = \overline{v}_2 - \alpha\overline{q}_1$. Scalarul α se determină impunând ca vectorul $\overline{0}_2$ să fie ortogonal pe $\overline{q}_1$. Adică

$$\overline{0}_2 \cdot \overline{q}_1 = 0 \Leftrightarrow (\overline{v}_2 - \alpha\overline{q}_1) \cdot \overline{q}_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \overline{v}_2 \cdot \overline{q}_1.$$

Deci vectorul $\overline{0}_2 = \overline{v}_2 - (\overline{v}_2 \cdot \overline{q}_1)\overline{q}_1$ este ortogonal pe $\overline{q}_1$.

Notând versorul lui $\overline{0}_2$ cu $\overline{q}_2 = \frac{\overline{v}_2 - (\overline{v}_2 \cdot \overline{q}_1)\overline{q}_1}{|\overline{v}_2 - (\overline{v}_2 \cdot \overline{q}_1)\overline{q}_1|}$, avem construit sistemul ortonormat $\{\overline{q}_1, \overline{q}_2\}$.

Etapa k**:** Presupunem că am construit deja un sistem ortonormat $\{\overline{q}_1, ..., \overline{q}_k\}$, $3 \leq k \leq n$.

Etapa k+1**:** Definim vectorul $\overline{0}_{k+1}$ ca o combinaţie liniară a vectorului $\overline{v}_{k+1}$ din baza iniţială şi a vectorilor din sistemul ortonormat $\{\overline{q}_1, ..., \overline{q}_k\}$ construit deja:

$$\overline{0}_{k+1} = \overline{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{q}_i.$$

Scalarii α_i îi determinăm impunând condiţia ca vectorul $\overline{0}_{k+1}$ să fie simultan ortogonal pe $\overline{q}_1, ..., \overline{q}_k$. Aşadar, din condiţia $\overline{0}_{k+1} \cdot \overline{q}_i = 0$, obţinem $\alpha_i = \overline{v}_{k+1} \cdot \overline{q}_i$, $i = \overline{1, k}$. Deci

$$\overline{0}_{k+1} = \overline{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\overline{v}_{k+1} \cdot \overline{q}_i)\overline{q}_i.$$

Notând versorul lui $\overline{0}_{k+1}$ cu $\overline{q}_{k+1} = \frac{\overline{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\overline{v}_{k+1} \cdot \overline{q}_i)\overline{q}_i}{|\overline{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\overline{v}_{k+1} \cdot \overline{q}_i)\overline{q}_i|}$, am construit recursiv sistemul ortonormat $\{\overline{q}_1, ..., \overline{q}_{k+1}\}$.

Propoziţie 6.3.1. Fie V un spaţiu euclidean n-dimensional. Atunci fiecare bază ortonormată pentru un subspaţiu $m-$ dimensional U a lui V poate fi completată la o bază ortonormată pentru V.

Demonstraţie. Fie $\{\overline{q}_1, ..., \overline{q}_m\}$ o bază ortonormată pentru V. Conform Propozitiei 3.2.14, această bază poate fi completată la o bază $\{\overline{q}_1, ..., \overline{q}_m, ..., \overline{q}_n\}$ pentru V. Folosind metoda de ortonormare Gramm-Schmidt, vom construi, pornind de la această bază, o bază ortonormată pentru V. □

Exemplu 6.3.2. În spaţiul euclidean $\mathbf{R}^4$ fie vectorii $\overline{v}_1(4, 2, -2, -1)$, $\overline{v}_2(2, 2, -4, -5), \overline{v}_3(0, 8, -2, -5)$. Pornind de la această bază, găsiţi o bază ortonormată pentru un subspaţiu 3-dimensional din $\mathbf{R}^4$.

Aplicând Gramm-Schmidt, găsim baza ortonormată

$\{\overline{q}_1(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}), \overline{q}_2(-\frac{2}{\sqrt{24}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{24}}, -\frac{4}{\sqrt{24}}), \overline{q}_3(-\frac{2}{\sqrt{44}}, \frac{6}{\sqrt{44}}, \frac{2}{\sqrt{44}}, 0)\}$.

Definiţie 6.3.3. Fie V un spaţiu euclidean şi fie M, N două submulţimi din V. Spunem că M şi N sunt **ortogonale** dacă $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0, \forall \overline{x} \in M, \overline{y} \in N$.

Definiţie 6.3.4. Fie M o submulţime a spaţiului euclidean V. Mulţimea $M^{\perp} = \{\overline{v} \in V \mid \overline{v} \perp M\} = \{\overline{v} \in V \mid \overline{v} \cdot \overline{m} = 0, \forall \overline{m} \in M\}$ se numeşte **complementul ortogonal a lui** M **în** V.

⋆ Complementul ortogonal al unei submulţimi a unui spaţiu vectorial V este un subspaţiu vectorial a lui V.

Propoziţie 6.3.5. Fie U un subspaţiu r-dimensional al unui spaţiu eudlidean n-dimensional V. Atunci avem:

1. complementul ortogonal $U^{\perp}$ a lui U este un subspaţiu $(n - r)$-dimensional a lui V;
2. $U^{\perp\perp} = \{\overline{v} \in V | \overline{u} \cdot \overline{v} = 0, \forall \overline{u} \in U^{\perp}\} = U$;
3. $V = U \oplus U^{\perp}$.

Demonstraţie.

1. Conform Propoziţiei 6.3.1, U are o bază ortonormată $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_r\}$ care poate fi completată la o bază $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_r, \overline{v}_{r+1} ..., \overline{v}_n\}$ pentru V. Aşadar, deoarece vectorii $\overline{v}_{r+1} ..., \overline{v}_n$ sunt din $U^{\perp}$,

   $$\dim U^{\perp} \geq n - r.$$

   Fie $\overline{u} \in U \cap U^{\perp}$. Atunci $\overline{u} \cdot \overline{u} = 0$ şi astfel $\overline{u} = \overline{0}$. Astfel avem $U \cap U^{\perp} = \{\overline{0}\}$ şi deci $\dim U \cap U^{\perp} = 0$. Deoarece, conform Propoziţiei 3.2.15,

   $$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim(U + U^{\perp}) + \dim U \cap U^{\perp},$$

   de aici obţinem $\dim U^{\perp} = n - r$.

2. Observăm că $\forall \overline{v} \in U^{\perp}, \forall \overline{u} \in U$, rezultă că $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0$. Astfel $U \subset U^{\perp\perp}$. Conform punctului precedent $\dim U^{\perp\perp} = n - \dim U^{\perp} = r$. Aşadar, deoarece $\dim U = r$, obţinem $U = U^{\perp\perp}$.

□

6.4 Proiecţia ortogonală a unui vector pe un subspaţiu

Fie V un **R**-spaţiu euclidean de dimensiune n, fie $\{0\} \neq U$ un subspaţiu al său şi fie $\{\overline{0}\} \neq \overline{v} \in V$.

Definiţie 6.4.1. **Proiecţia ortogonală** a vectorului $\overline{v}$ pe subspaţiul U este vectorul $\overline{u} \in U$ cu proprietatea că $\overline{v} - \overline{u} \perp \overline{u}$, adică $(\overline{v} - \overline{u}) \cdot \overline{u} = 0$.

Cazul 1. Proiecţia ortogonală a unui vector $\overline{v}$ pe un vector $\overline{0} \neq \overline{w}$ este proiecţia ortogonală a vectorului $\overline{v}$ pe subspaţiul generat de $\overline{w}$: $U = \{\overline{u} \in V | \overline{u} = a \cdot \overline{w}, a \in \mathbf{R}\}$. Proiecţia ortogonală a lui $\overline{v}$ pe U este vectorul $\overline{u} = a \cdot \overline{w}, a \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$(\overline{v} - a \cdot \overline{w}) \cdot \overline{w} = 0.$$

De aici obţinem $a = \frac{\overline{v} \cdot \overline{w}}{\overline{w} \cdot \overline{w}}$. Deci

$$\overline{u} = \mathrm{pr}_{\overline{\mathrm{w}}}\overline{\mathrm{v}} = \mathrm{a} \cdot \overline{\mathrm{w}} = \frac{\overline{\mathrm{v}} \cdot \overline{\mathrm{w}}}{\overline{\mathrm{w}} \cdot \overline{\mathrm{w}}} \cdot \overline{\mathrm{w}}.$$

Dacă $|\overline{w}| = 1$, atunci $\mathrm{pr}_{\overline{\mathrm{w}}}\overline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}} \cdot \overline{\mathrm{w}}$.

Consecinţă Coordonatele unui vector $\overline{v}$ într-o bază ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ sunt $x_i = \overline{v} \cdot \overline{e}_i, i = \overline{1, n}$. Aşadar vectorul $\overline{v}$ poate fi exprimat în baza $\mathcal{B}$ astfel:

$$\overline{v} = (\overline{v} \cdot \overline{e}_1)\overline{e}_1 + ... + (\overline{v} \cdot \overline{e}_1)\overline{e}_1 = \mathrm{pr}_{\overline{\mathrm{e}}_1}\overline{\mathrm{v}} + ... + \mathrm{pr}_{\overline{\mathrm{e}}_\mathrm{n}}\overline{\mathrm{v}}.$$

Cazul 2. Proiecţia ortogonală a unui vector $\overline{v}$ pe un subspaţiu $m-$dimensional $U, m > 1$.

Fie $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_m\}$ o bază ortonormată pentru U.

Propoziţie 6.4.2. Suma proiecţiilor ortogonale ale lui $\overline{v}$ pe vectorii bazei $\mathcal{B}$ subspaţiului U este proiecţia ortogonală a vectorului $\overline{v}$ pe subspaţiul U. Adică

$$\overline{u} = \mathrm{pr}_{\overline{\mathrm{e}}_1}\overline{\mathrm{v}} + ... + \mathrm{pr}_{\overline{\mathrm{e}}_\mathrm{n}}\overline{\mathrm{v}} = (\overline{\mathrm{v}} \cdot \overline{\mathrm{e}}_1) \cdot \overline{\mathrm{e}}_1 + ... + (\overline{\mathrm{v}} \cdot \overline{\mathrm{e}}_\mathrm{n}) \cdot \overline{\mathrm{e}}_\mathrm{n}.$$

Demonstraţie. Trebuie să demonstrăm că $\overline{v} - \overline{u} \perp \overline{u}$. Într-adevăr

$$(\overline{v} - \overline{u}) \cdot \overline{u} = \overline{v} \cdot \overline{u} - \overline{u} \cdot \overline{u} =$$
$$= [(\overline{v} \cdot e_1) \cdot (\overline{v} \cdot e_1) + ... + (\overline{v} \cdot e_m) \cdot (\overline{v} \cdot e_m)] - [(\overline{v} \cdot e_1)^2 + ... + (\overline{v} \cdot e_m)^2] = 0.$$

□

6.5 Exerciţii

Exerciţiu 6.5.1. Găsiţi o bază pentru complementul ortogonal al vectorului $\overline{v}(-1,5,2,0)$ din spaţiul vectorial euclidean $\mathbf{R}^4$.

Soluţie. Folosind definiţia complementului ortogonal, obţinem

$$\overline{v}^{\perp} = \{\overline{w} \mid \overline{v} \cdot \overline{w} = 0\} = \{(x,y,z,t) \mid$$
$$-x + 5y + 2z = 0\} = \{\alpha \cdot \overline{u}_1(1,0,\tfrac{1}{2},0) + \beta \cdot \overline{u}_2(0,1,-\tfrac{5}{2},0) \mid \alpha,\beta \in \mathbf{R}\}.$$

Deci o bază pentru $\overline{v}^{\perp}$ este $B = \{\overline{u}_1(1,0,\frac{1}{2},0), \overline{u}_2(0,1,-\frac{5}{2},0)\}$.

Exerciţiu 6.5.2. Deduceţi coordonatele unui vector ce este ortogonal pe fiecare vector din subspaţiul vectorial S de ecuaţie $3x - y + 2z = 0$ din spaţiul vectorial euclidean $\mathbf{R}^3$.

Soluţie. Căutăm întâi o bază pentru S. Observăm că

$$S = \{(x,y,z) \mid 3x - y + 2z = 0\} = \{\alpha \cdot \overline{w}_1(1,3,0) + \beta \cdot \overline{w}_1(0,2,1) \mid \alpha,\beta \in \mathbf{R}\}.$$

Aşadar o bază pentru S este $B = \{\overline{w}_1(1,3,0), \overline{w}_1(0,2,1)\}$. Conform definiţiei complementului ortogonal, avem

$$S^{\perp} = \{\overline{u}(x,y,z) \mid \overline{u} \cdot \overline{w}_1 = 0, \overline{u} \cdot \overline{w}_0 = 0\} = \{(x,y,z) \mid$$
$$x + 3y = 0, 2y + z = 0\} = \{\alpha \cdot (3,-1,2) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$$

Deci $\overline{v}(3,-1,2)$ este un vector ortogonal pe fiecare vector din S.

Exerciţiu 6.5.3. Să se determine complementul ortogonal $S^{\perp}$ al subspaţiului vectorial S având ecuaţiile $-2x + y - 3z = 0, x + 5y - 2z = 0$ din spaţiul vectorial euclidean $\mathbf{R}^3$.

Soluţie. Observăm că

$$S = \{(x,y,z) \mid -2x + y - 3z = 0, x + 5y - 2z = 0\} = \{\alpha \cdot \overline{w}(13,-7,-11) \mid$$
$$\alpha \in \mathbf{R}\}$$

Aşadar o bază pentru S este $B = \{\overline{w}(13,-7,-11)\}$. Atunci

$$S^{\perp} = \{\overline{u} \mid \overline{u} \cdot \overline{w} = 0\} = \{(x,y,z) \mid 13x - 7y - 11z = 0\}.$$

Exerciţiu 6.5.4. Să se determine proiecţia ortogonală a vectorului $\overline{v}(2,-1,3,5)$ în spaţiul vecorial euclidean $\mathbf{R}^4$ pe vectorul $\overline{w}(2,2,2,1)$. Ştiind că distanţa dintre doi vectori într-un spaţiu vectorial se defineşte prin $d(\overline{v},\overline{w}) = |\overline{v}-\overline{w}|$, să se calculeze distanţa dintre vectorul $\overline{v}$ dat şi proiecţia sa ortogonală pe $\overline{w}$.

Soluţie. Observăm că proiecţia vectorului $\overline{v}$ pe vectorul $\overline{w}$ este

$$\mathrm{pr}_{\overline{\mathrm{w}}}\overline{\mathrm{v}} = \frac{\overline{\mathrm{w}}\cdot\overline{\mathrm{v}}}{\overline{\mathrm{w}}\cdot\overline{\mathrm{w}}}\cdot\overline{\mathrm{w}} = 1\cdot\overline{\mathrm{w}} = \overline{\mathrm{w}}(2,2,2,1).$$

Calculăm în continuare

$$d(\overline{v},\mathrm{pr}_{\overline{\mathrm{w}}}\overline{\mathrm{v}}) = \mathrm{d}(\overline{\mathrm{v}},\overline{\mathrm{w}}) = |\overline{\mathrm{v}}-\overline{\mathrm{w}}| = \sqrt{26}.$$

Exerciţiu 6.5.5. Să se determine o bază în spaţiul vectorial euclidean $S\subset\mathbf{R}^3$ de ecuaţie $4x-y+2z=0$, să se ortonormeze folosind Gramm-Schmidt şi apoi să se calculeze proiecţia ortogonală a vectorului $\overline{v}(3,1,-1)$ pe S. Dacă $B=\{\overline{q}_1,\overline{q}_2\}$ este o bază ortonormată pentru S, ce fel de bază este $B=\{\overline{q}_1,\overline{q}_2,\overline{u}(4,-1,2)\}$ pentru $\mathbf{R}^3$?

Soluţie. Observăm că

$$S=\{(x,y,z)\mid 4x-y+2z=0\}=\{\alpha\cdot\overline{u}_1(1,4,0)+\beta\cdot\overline{u}_2(0,2,1)\mid \alpha,\beta\in\mathbf{R}\}.$$

Aşadar o bază pentru S este $B'=\{\overline{u}_1(1,4,0),\overline{u}_2(0,2,1)\}$. Deoarece $\overline{u}_1\cdot\overline{u}_2\neq 0$, baza B' nu este o bază ortogonală. O vom transforma într-o bază ortonormată aplicând metoda de ortonormare Gramm-Schmidt a unei baze oarecare. În acest scop definim

$$\overline{q}_1=\frac{\overline{u}_1}{|\overline{q}_1|}$$

şi calculăm

$$\overline{0}_2=\overline{u}_2-(\overline{u}_2\cdot\overline{q}_1)\cdot\overline{q}_1=(-\tfrac{8}{17},\tfrac{8}{17},1)||(-8,18,17).$$

Definim în continuare versorul

$$\overline{q}_2=\frac{\overline{0}_2}{|\overline{0}_2|}=\frac{1}{\sqrt{677}}\cdot(-8,18,17).$$

Aşadar $B'' = \{\overline{q}_1, \overline{q}_2\}$ este o bază ortonormată pentru S. Observăm că $\overline{u}(4,-1,2)$ este complementul ortogonal al spaţiului vectorial S fiind astfel perpendicular pe fiecare vector din S şi deci, în particular, pe vectorii $\overline{q}_1$ şi $\overline{q}_2$. Aşadar $B = \{\overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{u}(4,-1,2)\}$ este o bază ortogonală pentru $\mathbf{R}^3$. B nu este o bază ortonormată deoarece $|\overline{u}| = \sqrt{21} \neq 1$.

Exerciţiu 6.5.6. În spaţiul euclidean $\mathbf{R}^4$ se consideră vectorii $\overline{v}_1(1,0,2,-1)$ şi $\overline{v}(1,2,0,1)$. Să se arate că aceşti vectori sunt ortogonali şi să se completeze aceşti doi vectori la o bază ortogonală pentru $\mathbf{R}^4$.

Soluţie. Deoarece $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = 0$, cei doi vectori sunt perpendiculari. Deci ei formează o bază ortogonală pentru subspaţiul vectorial generat de ei pe care îl notăm cu S. Căutăm în continuare complementul ortogonal a lui S:

$$S^{\perp} = \{\overline{w}(x,y,z,t) \mid \overline{w} \cdot \overline{v}_1 = 0, \overline{w} \cdot \overline{v}_2 = 0\} = = \{(x,y,z,t) \mid x + 2z - t = 0, x + 2y + t = 0\} = = \{\alpha \cdot \overline{u}_1(1,0,-1,-1) + \beta \cdot \overline{u}_2(0,1,-1,-2) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

Aşadar $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ este o bază ortogonală pentru $\mathbf{R}^4$.

Exerciţiu 6.5.7. 1. Să se arate că într-un spaţiu vectorial înzestrat cu produsul scalar $'\cdot'$ astfel încât $|\overline{x}|^2 = \overline{x} \cdot \overline{x}$, are loc egalitatea paralelogramului:

$$|\overline{x} + \overline{y}|^2 + |\overline{x} - \overline{y}|^2 = 2 \cdot (|\overline{x}|^2 + |\overline{y}|^2) (\star).$$

2. Dacă V este un $\mathbf{R}-$spaţiu vectorial în care lungimea unui vector $\overline{v} \in V$ are proprietăţile uzuale ale modulului astfel încât are loc egalitatea $(\star)$, atunci V poate fi înzestrat cu un produs scalar $'\cdot'$ astfel încât $|\overline{x}|^2 = \overline{x} \cdot \overline{x}$.

Soluţie. 1. Observăm că

$$|\overline{x} + \overline{y}|^2 + |\overline{x} - \overline{y}|^2 = (\overline{x} + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + \overline{y}) + (\overline{x} - \overline{y}) \cdot (\overline{x} - \overline{y}) = \\ = |\overline{x}|^2 + 2 \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} + |\overline{y}|^2 + |\overline{x}|^2 - 2 \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} + |\overline{y}|^2 = 2 \cdot (|\overline{x}|^2 + |\overline{y}|^2).$$

2. Dacă egalitatea $(\star)$ este îndeplinită pentru funcţia modul pe V, atunci prin

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \tfrac{1}{4}(|\overline{x} + \overline{y}|^2 + |\overline{x} - \overline{y}|^2), \forall x, y \in V$$

putem defini un produs scalar cu $\overline{x} \cdot \overline{x} = |\overline{x}|^2$.

Arătăm în continuare că operaţia $'\cdot'$ defintiă mai sus îndeplineşte proprietăţile unui produs scalar. Observăm că $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$ şi deci $'\cdot'$ este comutativ. Observăm, de asemenea, că $\overline{x} \cdot \overline{x} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$. Vom arăta în continuare că

$$(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) \cdot \overline{y} = \overline{x}_1 \cdot \overline{y} + \overline{x}_2 \cdot \overline{y}, \forall \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{y} \in V.$$

Observăm că, deoarece $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{y} \in V$, avem

$$|(x_1 + \overline{y}) + \overline{x}_2|^2 + |\overline{x}_1 + \overline{y} - \overline{x}_2|^2 = 2 \cdot (|\overline{x}_1 + \overline{y}|^2 + |\overline{x}_2|^2)$$

şi

$$|(x_2 + \overline{y}) + \overline{x}_1|^2 + |\overline{x}_2 + \overline{y} - \overline{x}_1|^2 = 2 \cdot (|\overline{x}_2 + \overline{y}|^2 + |\overline{x}_1|^2).$$

De asemenea, ştim că

$$(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) \cdot \overline{y} = \frac{1}{4}(|\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{y}|^2 - |\overline{x}_1 + \overline{x}_2 - \overline{y}|^2).$$

Aşadar, obţinem

$$\begin{gathered}
4 \cdot (\overline{x}_1 \cdot \overline{y} + \overline{x}_2 \cdot \overline{y}) = (|\overline{x}_1 + \overline{y}|^2 - |\overline{x}_1 - \overline{y}|^2) + (|\overline{x}_2 + \overline{y}|^2 - |\overline{x}_2 - \overline{y}|^2) = \\
= (|\overline{x}_1 + \overline{y}|^2 + |\overline{x}_2 + \overline{y}|^2) - (|\overline{x}_1 - \overline{y}|^2 + |\overline{x}_2 - \overline{y}|^2) = \\
= |\overline{x}_1 + \overline{y}|^2 + |\overline{x}_2|^2 + |\overline{x}_2 + \overline{y}|^2 + |\overline{x}_1|^2 - (|\overline{x}_1 - \overline{y}|^2 + |\overline{x}_2|^2) - (|\overline{x}_2 - \overline{y}|^2 + |\overline{x}_2|^2) = \\
= \frac{1}{2} \cdot |(\overline{x}_1 + \overline{y}) + \overline{x}_2|^2 + \frac{1}{2} \cdot |(\overline{x}_2 + \overline{y}) + \overline{x}_1|^2 - \frac{1}{2} \cdot |(\overline{x}_1 - \overline{y}) + \overline{x}_2|^2 - \frac{1}{2} \cdot |(\overline{x}_2 - \overline{y}) + \overline{x}_1|^2 = \\
= |\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{y}|^2 - |\overline{x}_1 + \overline{x}_2 - \overline{y}|^2 = 4 \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2) \cdot \overline{y}.
\end{gathered}$$

În concluzie operaţia $'\cdot'$ definită pe V este un produs scalar.

7 Bibliografie

[1] E. Carlen, M. Conceicao Carvalho, *Linear algebra from the beginning*, W. H. Freeman and Company, 2007.

[2] I. Corovei, V. Pop, *Algebră liniară: Seminarii, Teme, Concursuri*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2003.

[3] D. Flondor, N. Donciu, *Algebră şi analiză matematică*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.

[4] P. R. Halmos, *Linear Algebra: Problem Book*, The Mathematical Association of America, Washington, 1995.

[5] I. N. Herstein, *Topics in Algebra*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1980.

[6] H.-J. Kowalsky, G. O. Michler, *Lineare Algebra*, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1995.

[7] S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New York, 2006.

[8] E. Petrişor, *Algebră liniară - suport de curs: Facultatea de Automatică şi Calculatoare, Universitatea 'Politehnica' din Timişoara*.

[9] V. Pop, *Algebră liniară*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2003.

[10] F. Zhang, *Linear Algebra*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.